

UNIDAD DIDÁCTICA 1:

NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

En esta unidad aprenderás a:

1. Identificar números naturales, enteros, racionales e irracionales.
2. Operar correctamente con números reales.
3. Operar correctamente con expresiones algebraicas.
4. Realizar correctamente las potencias de números reales y las operaciones con radicales.
5. Reconocer y definir los conjuntos más usuales de números reales (intervalos y entornos), así como sus uniones e intersecciones.
6. Manejar el concepto de logaritmo y sus propiedades.
7. Conocer el concepto de valor absoluto.

CONCEPTOS

1. Números racionales: definición. Expresión decimal y fraccionaria.
2. Números irracionales: definición.
3. Números reales: definición. Operaciones y propiedades. Densidad.
4. Potencias de exponente cualquiera.
5. Radicales: definición. Operaciones con radicales. Racionalización.
6. Intervalos y entornos. Unión e intersección.
7. Logaritmos: definición y propiedades. Cambio de base.
8. Valor absoluto. Definición y cálculo.

NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1. INTRODUCCIÓN

Los conjuntos de números van ampliándose a lo largo de la historia, a medida que surgen actividades que hacen necesario su uso.

Desde lo más rudimentario, contar, que da lugar a los números naturales $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, pasando por repartir, que hace necesario el nacimiento de los números racionales $\mathbf{Q} = \{a/b, b \neq 0\}$, comerciar con saldos negativos, que origina el conjunto de los números enteros $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ y construir, comparar, edificar, medir... que requiere que el conjunto de números se amplíe de nuevo.

Construye un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Los números siempre han estado en el entorno y las actividades que nos rodean, haciéndose notar, a pesar del rechazo que ha generado la existencia de algunos de ellos, como el 0 y $\sqrt{-1}$.

Son sus grafías las que han experimentado una evolución asombrosa a lo largo de la historia, para responder a las necesidades crecientes en su uso hasta alcanzar la forma que tienen en la actualidad.

2. CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS

→ Números **NATURALES**: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

→ Números **ENTEROS**: Son los números naturales, sus opuestos y 0.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

→ Números **RACIONALES**: Se llama número racional al que puede expresarse como fracción de números enteros.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}; b \neq 0 \right\}$$

Su expresión decimal es exacta o periódica (pura o mixta).

Define, con los apuntes de cursos anteriores, qué se entiende por decimal exacto o periódico, y escribe cómo se realiza el paso de nº decimal a fracción y viceversa.

¿Cuál sería el resultado de estas operaciones? $\frac{3}{0}, \frac{0}{3}, \frac{0}{0}$

→ Números **IRRACIONALES:**

Los números irracionales, al contrario que los racionales, no pueden expresarse como cociente de números enteros, luego no pueden ser ni decimales exactos ni periódicos. Por tanto, los definimos como:

“El conjunto de números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales **no periódicas**”. Dicho conjunto se designa con la letra **I**.

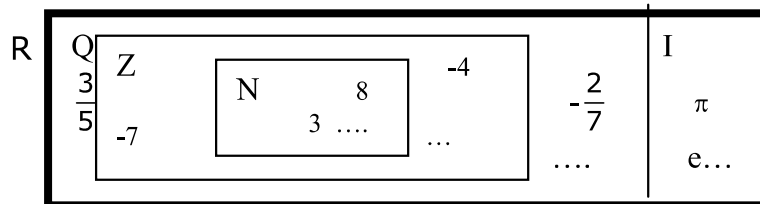
Son ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}$, π , e... Dado que no se puede conocer su valor exacto (por eso se designan con letras o símbolos), se suelen utilizar aproximaciones mediante números racionales cercanos. Por ejemplo $\pi \cong 3'1416$, $e \cong 2'7183$.

→ Números **REALES:**

Es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales. Se designa con la letra **R**. **R=Q ∪ I**

Se representan en la recta real asignando a cada punto un número. Entre cada dos números reales hay infinitos números reales.

¿Cuál es el número real siguiente a 1? ¿y el anterior a 2? ¿Son consecutivos los números reales?



Actividades

1. Clasifica los siguientes números indicando cuál es el conjunto (N, Z, Q, R) más pequeño al que pertenecen:

$$5, -7, 0'23, 5/4, \sqrt{\frac{18}{2}}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{-5}, \frac{-\pi}{2}, 4'7, \sqrt{-4}$$

2. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

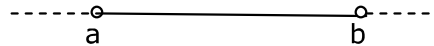
- | | | |
|------------------|-----------------|---------------------|
| a) 3'222... | b) $\sqrt{7}$ | c) -0'1010010001... |
| d) -3'28888... | e) 0'4353535... | f) $\sqrt{11}$ |
| g) 120'143143... | h) $\sqrt{121}$ | |

3. INTERVALOS Y ENTORNOS

Los números reales pueden representarse en la recta real agrupados en intervalos y entornos:

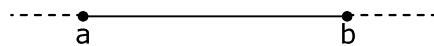
- Intervalo **abierto**:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



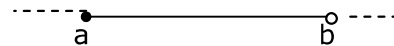
- Intervalo **cerrado**:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

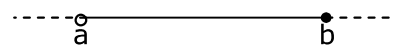


- Intervalo **semiabierto o semicerrado**:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

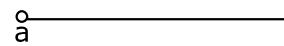


$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

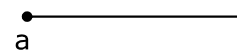


- Intervalos **infinitos**:

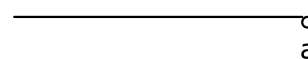
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



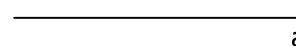
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

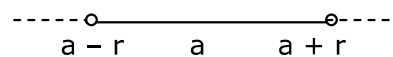


$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



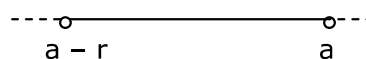
- Entorno **simétrico de centro a y radio r**:

$$E(a, r) = (a - r, a + r)$$



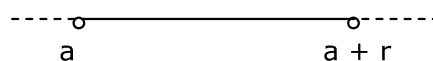
- Entorno **lateral por la izquierda de centro a y radio r**:

$$E^-(a, r) = (a - r, a)$$



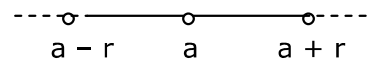
- Entorno **lateral por la derecha de centro a y radio r**:

$$E^+(a, r) = (a, a + r)$$



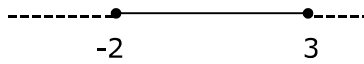
- Entorno **reducido** de centro a y radio r:

$$E^*(a,r) = (a-r, a+r) - \{a\}$$

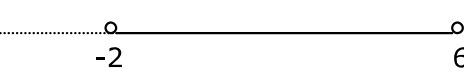


Ejemplo:

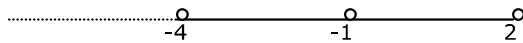
$$[-2,3]$$



$$E(2,4) = (-2,6)$$



$$E^*(-1,3) = (-4,2) - \{-1\}$$



UNIÓN: Se define la unión de dos conjuntos A y B como el conjunto formado por todos los elementos de ambos conjuntos. Se escribe $A \cup B$.

INTERSECCIÓN: Se define la intersección de dos conjuntos A y B como el conjunto formado por los elementos comunes de ambos conjuntos. Se escribe $A \cap B$.

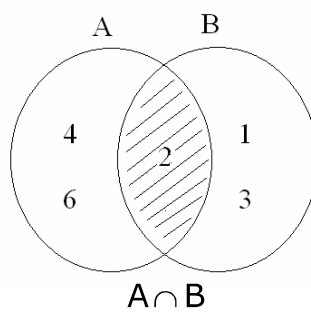
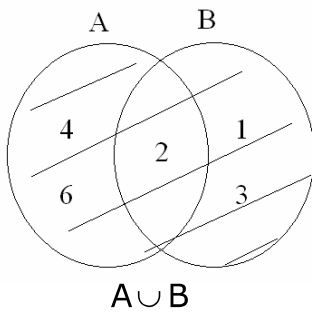
Ejemplos:

$$1) \quad A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$



$$2) \quad [-3,5) \cup (2,9) = [-3,9)$$

$$[-3,5] \cap (2,9) = (2,5]$$

$$(2,4] \cap [6,8] = \emptyset$$

(\emptyset significa conjunto vacío: que no contiene ningún elemento)

Representa gráficamente los intervalos y comprueba los resultados.

Actividades

3. Representa los siguientes conjuntos numéricos:

a) $(-3,-1)$

b) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

c) $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

d) $[4,+\infty)$

e) $[-2,5) \cup (5,7]$

f) $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

4. Expresa como desigualdad y como intervalo y representa:

a) x es menor que -5 .

b) 3 es menor o igual que x .

c) x está comprendido entre -5 y 1 .

d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.

5. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a. $E^*(-5,6)$

c) $E^-\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b. $E^+\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$

d) $E\left(0, \frac{4}{7}\right)$

6. Identifica los entornos $E(-1,6)$, $E^*(0,4)$, $E^-(5,2)$ y $E^+(0,6)$ con el conjunto que le corresponda:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 6\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -7 < x < 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 4\} - \{0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 5\}$

4. VALOR ABSOLUTO

Se define el valor absoluto de un número real como su distancia al 0, es decir, el valor absoluto de un número a es el propio número a , si éste es positivo, y su opuesto $-a$, si es negativo (Recuerda que si a es negativo, $-a$ es positivo). Se escribe $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|7| = 7$$

$$|-7| = 7$$

$$|x| = 4 \Rightarrow x = 4, x = -4$$

$$|x - 5| = 2 \begin{cases} \rightarrow x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7 \\ \rightarrow x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Actividades

7. Hallar el valor absoluto de: 7^4 , 0 , -5^8 .

8. ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes igualdades?

a) $|x| = 3$ b) $|x| = 0$ c) $|x + 1| = 3$ d) $|x| = \sqrt{3}$

9. ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?

a) $|x| < 3$ b) $|x| \geq 3$

5. NÚMEROS REALES. OPERACIONES. (REPASO)

5.1. SUMA

$a + b \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (la suma de dos números reales siempre es otro nº real. La suma es una operación interna)

- Propiedades:

- a) Conmutativa: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
 b) Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
 c) Elemento neutro: $0 \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$
 d) Elemento opuesto: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} / a + (-a) = 0$

(\forall significa: para todo o para cualquier)

Por cumplir estas cuatro propiedades, se dice que \mathbb{R} es un GRUPO ABELIANO respecto a la suma.

5.2. PRODUCTO

$a \cdot b \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (el producto de números reales también es una operación interna).

- Propiedades:

- a) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
 b) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
 c) Elemento neutro: $1 \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$
 d) Elemento inverso: $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} / a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Se deduce que el conjunto de los números reales (\mathbb{R}), es también GRUPO ABELIANO respecto al producto. Además también se cumple:

Distributiva respecto a la suma

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por cumplir estas 9 propiedades se dice que \mathbb{R} tiene estructura de CUERPO CONMUTATIVO respecto a la suma y el producto.

5.3. RESTA

Por existir elemento opuesto, podemos definir la resta como la suma con el opuesto $a - b = a + (-b)$

5.4. COCIENTE

Por existir elemento inverso $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$)

5.5. POTENCIACIÓN. PROPIEDADES

a) Potencias de exponente entero: a^n donde $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

- Si $n > 0$ $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ (n factores)

- Si $n = 0$ $a^0 = 1$ (ya que $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$)

- Si $n < 0$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ (ya que $a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$)

b) Potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{ya que} \quad (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $(a : b)^m = a^m : b^m$

Intenta justificar las igualdades anteriores

5.6. RADICACIÓN. OPERACIONES CON RADICALES

- **Definición:**

Radical es toda expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ donde a es el radicando y n es el índice de la raíz, siendo:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- **Operaciones**

a) Suma: Sólo se pueden sumar radicales cuando al simplificarlos, tienen el mismo índice y el mismo radicando, extrayendo como factor común dicho radical

$$b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c)\sqrt[n]{a}$$

b) Producto :

- Si los radicales tienen el mismo índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ porque

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$$
- Si tienen distinto índice hay que reducirlos previamente a índice común buscando su m.c.m.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt[4]{5a^7b^3c} = \sqrt[12]{3^4(a^2)^4b^45^3(a^7)^3(b^3)^3c^3} = \sqrt[12]{3^45^3a^{29}b^{13}c^3} = a^2b\sqrt[12]{3^45^3a^5bc^3}$$

c) Cociente :

- Si los radicales tienen el mismo índice: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$ porque

$$a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = (a : b)^{\frac{1}{n}}$$
- Si tienen distinto índice hay que reducirlos previamente a índice común buscando su m.c.m.

d) Potenciación :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{porque} \quad (a^{1/n})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) Radicalización :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{porque} \quad (a^{1/n})^{1/m} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

f) Racionalización

- Racionalización de denominadores:

a) $\frac{a}{\sqrt{b}}$ multiplicamos y dividimos por \sqrt{b}

b) $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

c) $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$ multiplicamos numerador y denominador por el conjugado.

Ejemplos:

$$1. \frac{2x}{\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$$

$$2. \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\sqrt[5]{2^2}} = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{2}$$

$$3. \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Actividad**10.** Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 5 - 3\left(4 : \frac{3}{5} + 1\right) =$$

$$b) (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a + c)^3 =$$

$$c) 7\sqrt{54} - 3\sqrt{18} + \sqrt{24} - \frac{3}{5}\sqrt{50} - \sqrt{6} =$$

$$d) \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} =$$

$$e) \sqrt[5]{12}(5\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}) - \left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$f) \left(\frac{-2 \cdot (-4)^2}{2^3}\right)^3 - \left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2 : \frac{3}{4}\right)^4 =$$

$$g) \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2x)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot (3x^3)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$h) \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{5}} \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot a^{-1}\right]^{\frac{4}{3}} =$$

$$i) \sqrt[4]{b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{b}}} =$$

$$j) \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} =$$

k) Racionaliza:

$$a) \frac{3xy^2}{\sqrt[3]{x^2y}}$$

$$b) \frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}$$

$$c) \frac{6}{\sqrt[4]{5}}$$

$$d) \frac{7}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 2 \cdot 5^3}}$$

6.- LOGARITMO DE UN NÚMERO. PROPIEDADES

Seguramente, serías capaz de resolver la ecuación: $2^x \cdot 2 = 64$, aunque la incógnita (x) esté en el exponente. Para ello, bastaría con expresar toda la igualdad en base 2:

$$2^{x+1} = 2^6 \Rightarrow x+1 = 6 \Rightarrow x=5.$$

Sin embargo, resultaría más difícil despejar con precisión la incógnita en esta ecuación:

$$2^x \cdot 2 = 40$$

ya que, siguiendo la estrategia anterior: $2^{x+1} = 40$, sólo podríamos dar un valor aproximado a x , pues 40 no es potencia de 2. Deducimos que $x+1$ debe ser 5'??.. pues $2^5=32$ y $2^6=64$. Por tanto, $x= 4'???$. Podríamos buscar con la calculadora una buena aproximación, probando con distintos valores.

No obstante, parece conveniente definir alguna herramienta matemática útil cuando se trata de manejar exponentes.

Sabemos que en toda potencia aparecen tres elementos: base, exponente y potencia o resultado. $2^3 = 8$

Necesitamos conocer dos de los tres elementos para calcular el tercero:

a) Si conocemos la base y el exponente: $2^3 = \square$ y debemos calcular el resultado, la operación se llama POTENCIA y te resulta conocida.

b) Si disponemos del exponente y la potencia: $\square^3 = 8$ y tenemos que calcular la base, la operación se llama RADICACIÓN y, aunque la has estudiado anteriormente, se escribe con otro formato: $\sqrt[3]{8} = \square$

c) La tercera posibilidad es que conozcamos la base y el resultado de la potencia: $2^\square = 8$

Es entonces cuando debemos calcular el exponente. Esto es lo que conocemos con el nombre de LOGARITMO. Logaritmo es un sinónimo de exponente

LOGARITMO \equiv EXPONENTE

También se escribe con otro formato: $\log_2 8 = \square$

Se lee "logaritmo en base 2 de 8"

Ejemplos:

a) $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$ b) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$
 c) $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$

Si no consigues hacerlo mediante cálculo mental, puedes llamarle **x** y pasar al formato potencia, es decir:

$$\log_3 \sqrt{27} = x \Rightarrow 3^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^x = (3^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{luego } \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$$

Actividad

11. Completa los siguientes logaritmos:

$\log_3 9 =$

$\log_3 \sqrt{3} =$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 =$

$\log_7 1 =$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} =$

$\log_{\sqrt{5}} 5 =$

$\log_4 \frac{1}{64} =$

$\log_2 \sqrt{\frac{1}{4}} =$

Ahora que comprendes el concepto, vamos a escribir una definición precisa del concepto de logaritmo:

Definición:

Se define el logaritmo en base *a* de *b*, como el exponente **x** al que hay que elevar *a* para obtener *b*, es decir

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
--

Cuando se manejan números muy grandes o muy pequeños, es más cómodo utilizar sólo los exponentes. ¿Sabías que los números de la escala de Richter que miden la fuerza de los terremotos, son logaritmos?

Calcula ahora los siguientes logaritmos:

$\log_1 3 =$

$\log_2 -4 =$

$\log_2 0 =$

$\log_{-2} 4 =$

Si has encontrado dificultades para resolverlos, quizá hayas llegado a alguna de las siguientes conclusiones:

Características:

1) La base *a* tiene que ser un nº positivo y distinto de 0 y 1, ya que una base negativa puede dar lugar a potencias no reales: $(-1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-1)^3} = \sqrt{-1}$????? (en la unidad 5 veremos los números complejos, que surgen de las raíces de números negativos).

Además, no tiene sentido hablar de $\log_1 3$ ó $\log_0 5$, pues cualquier potencia de 1 es igual a 1 (nunca podría ser 3), y cualquier potencia de 0 sería 0, es decir, sólo existirían $\log_1 1$ y $\log_0 0$ y serían iguales a todos los números reales.

2) Por otra parte, la potencia b no puede ser negativa ni 0,

Razona por qué y escríbelo.

$$\log_a b = c$$

↓ Potencia $b > 0$
 ↑ Base
 $a > 0$
 $a \neq 1$

↙ Exponente c
 cualquier n° real

3) Los logaritmos más utilizados son los de base 10, llamados **logaritmos decimales**, en los que no es necesario precisar la base, ($\log_{10} b = \log b$) y los **logaritmos neperianos**, de base el $n^\circ e \cong 2,7182\dots$ cuya notación es $\text{Lna} = \log_e a$.

Ejemplos: $\log 100 = 2,$ $\log 0,1 = -1$ $\text{Lne} = 1$

Calcula los siguientes logaritmos:

$$\log_a 1 =$$

$$\log_a a =$$

$$\log_a a^3 =$$

$$\text{Lne}^x =$$

Propiedades de los logaritmos:

Recuerda siempre que un logaritmo es un exponente y, por tanto, debe cumplir las mismas propiedades.

Sabemos que al multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes ya que: $a^3 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a} = a^5 \Rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Si el exponente del producto es la suma de los exponentes, el logaritmo del producto debe ser la suma de los logaritmos, es decir:

1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Por la misma razón, y dado que el exponente del cociente de dos potencias es la resta de los exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ se cumplirá que el logaritmo del cociente es la resta de los logaritmos:

2) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Por último, al elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ya que $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$,
Luego debe cumplirse que:

$$\mathbf{3) \quad \log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

(recuerda que tanto n como el $\log_a b$ son los exponentes)

Esta última propiedad puede razonarse de otra manera, utilizando la propiedad 1:

$$\log_a b^n = \log_a (\underbrace{b \cdot b \cdot b \dots \cdot b}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \dots + \log_a b}_{n \text{ veces}} = n \cdot \log_a b$$

Ejemplos:

1) Conocido el $\log 2 = 0'301$, calcula $\log 20$ y $\log 0'08$

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0'301 + 1 = 1'301$$

$$\log 0'08 = \log \frac{8}{100} = \log 8 - \log 100 = \log 2^3 - \log 100 = 3 \cdot \log 2 - 2 = 3 \cdot 0'301 - 2$$

2) Sabiendo que $\log x + \log 3 = \log 12$, halla x

$$\log(x \cdot 3) = \log 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Como has podido observar, estas propiedades nos permitirán obtener otros logaritmos a partir de uno o varios conocidos, o despejar incógnitas afectadas por logaritmos.

También es cierto que la mayoría de los logaritmos son números irracionales difíciles de precisar. Además, la infinidad de bases posibles hace más difícil la tarea. Por eso, tan sólo se manejan con asiduidad las bases 10 y e , que son las que puedes encontrar en cualquier calculadora.

Pero entonces, ¿cómo calcular $\log_3 5$?

Muy sencillo, se ha encontrado una fórmula que permite el paso de una base a otra.

Fórmula del cambio de base

Para pasar de base a a base b

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Sería entonces cierto que pasando a base 10 y utilizando la calculadora:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0'698}{0'477} = 1'465$$

Vamos a demostrar esta fórmula utilizando el formato de potencia, que resulta más familiar.

Demstración

Para ello, nombramos con una letra a cada logaritmo:

$\log_a x = p$, $\log_b x = q$ y $\log_b a = s$. Queremos demostrar que $p = \frac{q}{s}$

Se cumple que: $\left. \begin{array}{l} \text{si } \log_a x = p \Rightarrow a^p = x \\ \text{si } \log_b x = q \Rightarrow b^q = x \\ \text{si } \log_b a = s \Rightarrow b^s = a \end{array} \right\} \Rightarrow a^p = b^q \Rightarrow (b^s)^p = b^q$

↑
Sustituyendo a por b^s

Luego, $(b^s)^p = b^q \Rightarrow b^{sp} = b^q \Rightarrow sp = q \Rightarrow p = \frac{q}{s}$ como queríamos demostrar

c.q.d.

Por último, vamos ahora a resolver la ecuación que habíamos planteado al principio de este apartado:

$$2^x \cdot 2 = 40 \Rightarrow 2^{x+1} = 40 \Rightarrow \log_2 40 = x+1 \Rightarrow \frac{\log 40}{\log 2} = x+1 \Rightarrow x+1 = \frac{1'602}{0'301} \Rightarrow x+1 = 5'322 \Rightarrow x = 4'322$$

Actividades

12. Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

- a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} =$
- b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 =$

13. Calcula la base de estos logaritmos:

- a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{4} = 2$ c) $\log_x 0'04 = -2$
- d) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ e) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

14. Sabiendo que $\log 3 = 0'477$, calcula el logaritmo decimal de 30, 300, 3000, 0'3, 0'03, 0'003.

15. Sabiendo que $\log k = 14'4$ calcula:

a) $\log \frac{k}{100}$ **b)** $\log(0'1 \cdot k^2)$ **c)** $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ **d)** $(\log k)^{\frac{1}{2}}$

16. Si $\log k = x$, escribe en función de x :

a) $\log k^2$ **b)** $\log \frac{k}{100}$ **c)** $\log \sqrt{10k}$

17. Comprueba que $\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = \frac{-1}{6}$

18. Siendo $\log 2 = 0'301$ y $\log 3 = 0'477$ calcula:

a) $\log 5$ **b)** $\log 24$ **c)** $\log 18$ **d)** $\log \frac{8}{3}$

EJERCICIOS

1. Indica si es verdadero o falso:

- a) $[1, +\infty) \subset (1, +\infty)$
- b) $\emptyset \subset (-1, 1)$
- c) $(-\infty, \infty) \subset [0, +\infty)$
- d) $(-1, 1) \subset [-1, 1)$

** El símbolo \subset significa "contenido en" A está contenido en B: $A \subset B$ **

2. Dados los conjuntos:

- a. $A = \{x \in \mathbb{R} / -7 \leq x < 4\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 6\}$
- c. $C = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 5\}$

Calcula:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $(A \cup B) \cap C$
- d) $A \cap B \cap C$
- e) $A \cap (B \cup C)$
- f) $A \cup B \cup C$

3. Realiza las siguientes operaciones:

l) $\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x} - \frac{x}{4} - x\right) =$

m) $\frac{5^2 \cdot 7^{-3} \cdot 5^{-4}}{7^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-1}} =$

4. Calcula:

- a) $\log_2 1024 =$
- b) $\log_2 \frac{1}{64} =$
- c) $\log_3 \sqrt{3} =$
- d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} =$
- e) $\log 0'001 =$
- f) $\log_{\sqrt{3}} 3 =$
- g) $\log_2 \sqrt{8} =$
- h) $\log_{\pi} 1 =$

5. Sabiendo que $\log 2 = 0'301$, calcula:

a) $\log \sqrt[3]{0'02}$

b) $\log\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

c) $\log \sqrt{\frac{0'025}{8}}$

d) $\log \sqrt[5]{\frac{1}{0'32}}$

6. Sabiendo que $\log 3 = 0'477$, ¿cuánto valdrá $\log_3 10$?

7. Sabiendo que $\log_a b = 3$ y $\log_a 9b = 5$, ¿cuál será el valor de a?

8. ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?

- i. $\log a - \log b = 0$
- ii. $\log a = \log b + \log 2$
- iii. $\log a = 2 \log b$
- iv. $\log a = 1 + \log b$

9. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{11} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) =$
- b) $5 - (-2) + (-8) - (-4) - 5 =$
- c) $7 - (-3) \cdot (-8) - 3 : (-1) + 5 =$
- d) $3 - 4 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2} \right) \right] =$
- e) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-1} - \frac{1-x}{x^2-1} =$
- f) $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) (x^4 + x^3) =$
- g) $\sqrt{(3-2x)^3} + \sqrt{12-8x} - \sqrt{3x^2-2x^3} =$
- h) $\left(\left(\frac{1}{2} - 1 \right)^2 + \left(2 - \frac{1}{3} \right)^2 \right) + \left(\frac{3}{2} - 1 \right)^{-1} =$
- i) $\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^0 \cdot \left(\frac{5 \cdot 2}{3} : \frac{6}{5} \right)^{-2} - \left(4 \cdot \frac{1}{3} : \frac{6}{5} \right)^{-3} =$
- j) $\frac{\left(2 + \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{7} \right)}{\left(\frac{2}{5} - \frac{6}{7} \right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right)} =$
- k) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt{a} =$
 $\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} : \sqrt[8]{a} =$
- l) $\left(\sqrt{\frac{a}{2b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}} \right) : \sqrt{\frac{2b}{a}} =$

10. De los siguientes números di cuáles son racionales y cuáles irracionales. Añade también si son periódicos o no indicando, si existe, cuál es el período.

- a) 7'64
- b) 0'23414141...
- c) 1'7320
- d) 6'12354635463546...
- e) $\sqrt{3}$
- f) 3'07007000700007...
- g) 0'6666....
- h) 6

11. Extrae factores de los siguientes radicales:

- 1) $\sqrt{8}$
- 2) $3 \cdot \sqrt{8a^3}$
- 3) $2x^2y \sqrt{x^4y^3}$
- 4) $\sqrt[5]{\frac{5x^{10}}{y^8}}$
- 5) $\sqrt[4]{\frac{32x^6}{81y^5}}$
- 6) $4\sqrt{8b^3a^7}$

12. Realiza las siguientes operaciones:

$$1) [(-3)^2]^3 =$$

$$2) (-4)^5 : (-4)^3$$

$$3) \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5} \right) \right]^3$$

$$4) \left[\frac{(-2) \cdot (-3)^3}{9} \right]^2$$

$$5) \left[\left(\frac{-3}{5} \right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{5} \right)^2 \right]^3 : \left(\frac{-3}{5} \right)^{15} - \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^4$$

$$6) \left(\frac{-3}{4} \right)^{-2}$$

$$7) \left(2 - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

$$8) \left(-\sqrt{2}xy^3 \right)^3$$

$$9) x^2 x^3 x^{-1} x$$

$$10) [(-a)^3]^3$$

$$11) \left(2\sqrt[3]{\frac{5xy^3}{z^2}} \right)^5$$

$$12) 5^{\frac{-3}{2}}$$

$$13) (-8)^{\frac{1}{3}}$$

$$14) - \left(\frac{25}{4} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$15) (0'64)^{-0'5}$$

$$16) \sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64}$$

$$17) \sqrt[3]{(2197)^4}$$

$$18) \sqrt[5]{0'00032}$$

$$19) \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}}$$

$$20) \sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[4]{32}}}$$

13. Introduce factores bajo el signo radical:

$$1) \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{27}{2}} \quad 2) x \sqrt{\frac{1}{x}} \quad 3) \frac{3}{2xy} \sqrt{\frac{2xz}{y}}$$

$$4) \frac{a-b}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad 5) \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{-5}{7}}$$

14. Escribe en forma de potencias los radicales:

$$1) \sqrt{3x^5} \quad 2) \sqrt[4]{ab^2} \quad 3) \sqrt[4]{\left(2 - \frac{1}{5}\right)^3} \quad 4) \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$$

$$5) \sqrt[5]{\frac{a+1}{a-1}} \quad 6) \frac{2b\sqrt[3]{3x}}{3\sqrt{x}}$$

15. Escribe como radicales las potencias:

$$1) (2-x)^{\frac{5}{2}} \quad 2) 5^{\frac{-2}{5}} \quad 3) 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{-1}{2}}z^{\frac{3}{4}}$$

$$4) \frac{3+2^{-1}}{3-4^{\frac{-1}{5}}} \quad 6) 3a^{\frac{3}{2}} \left[5^{\frac{2}{3}} (3ab^2 - 5)^{\frac{3}{2}} \right]$$

16. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{7} \\ \text{b)} & \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{ab} \\ \text{c)} & 5\sqrt{12} + 7\sqrt{48} - \sqrt{108} - \sqrt{192} + \sqrt{243} \\ \text{d)} & \sqrt{2b} : \sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}} \\ \text{e)} & 2\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}) \\ \text{f)} & 3\sqrt{x} - \sqrt{4x} + 2\sqrt{36x} - 5\sqrt{x - \frac{9x}{25}} \\ \text{g)} & \sqrt{xy}(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2y}) \\ \text{h)} & (\sqrt{3-a} - \sqrt{3+a})(\sqrt{3-a} + \sqrt{3+a}) - 2a \\ \text{i)} & \sqrt[3]{(x-1)^2} \sqrt{\frac{1}{x-1}} \\ \text{j)} & \sqrt{\frac{a}{2b}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}} : \sqrt{\frac{2b}{a}} \right) \\ \text{k)} & (3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) \\ \text{l)} & \sqrt[12]{125} : \sqrt[8]{25} \\ \text{m)} & \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \\ \text{n)} & \sqrt{75a^3b^2} + \sqrt{3ab^4} \\ \text{ñ)} & 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2x}{9}} - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3x}{4}} + 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{6x}{125}} \\ \text{o)} & \frac{3^{-2} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3^{\frac{-4}{3}}} \\ \text{p)} & \frac{\left[(a^{-3})^{-2} \right]^4 \cdot (ab^{-1})^3 \cdot (b^3)^2}{(b^{-1}a^2)^{-1} \cdot a^{-2} \cdot (-a)^4 \cdot b^{-1}} \\ \text{q)} & (x-y) \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9x^2 - 9y^2} + \frac{x+y}{x-y} \sqrt{\frac{25xy^2 - 25y^3}{x+y}} \end{aligned}$$

17. Racionaliza las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{15}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$\text{b) } \frac{7}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 2 \cdot 5^3}}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\text{d) } \frac{2\sqrt{5}}{2 - \sqrt{3} + \sqrt{7}}$$

$$\text{e) } \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{4 - \sqrt{3}}}$$

$$\text{f) } \frac{a-b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\text{g) } \frac{2}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

$$\text{h) } \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}$$

$$\text{i) } \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$$

$$\text{j) } \frac{4 - a^2}{-\sqrt{a} + \sqrt{2}}$$

$$\text{k) } \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}}$$

$$\text{l) } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9\sqrt{2}}}$$

18. Realiza las siguientes operaciones:

$$\text{a) } \frac{(3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{72})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}}$$

$$\text{c) } \frac{2\left[\left(2 + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{6}\right] - 3\left(\frac{4}{5} + 2\right)}{\frac{2}{5}}$$

$$\text{d) } \left[\left(\frac{3}{2} - 4\right) : \left(1 - \frac{8}{3}\right) + \frac{1}{2}\right]^4 - \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^3$$

$$\text{e) } \left[\left(\frac{-3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{-3}{5}\right)^{15} - \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\text{f) } 4\sqrt{12} - \frac{3}{2}\sqrt{48} + \frac{2}{3}\sqrt{27} + \frac{3}{5}\sqrt{75}$$

$$\text{g) } 5 \cdot \sqrt[9]{8} - 3 \cdot (\sqrt{4} + \sqrt[10]{32}) - 8 \cdot \sqrt[8]{16} + \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\text{h) } \sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{2a^2b^2} \cdot ab$$

$$\text{i) } \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} : \sqrt[4]{a^3}}{\frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}}}$$

$$\text{j) } \frac{(pq)^3(p^2q^3)^2}{(p^2q^2)^{-2}}$$

$$\text{k) } \sqrt{\frac{m+n}{m^2}} \cdot \sqrt{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m^2+n^2}{n^2}}$$

$$\text{l) } \frac{\sqrt{ax} \cdot \sqrt[3]{xa^2}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[6]{a^5x}}$$

$$\text{m) } \frac{cd}{a} \sqrt{\frac{a^6}{cd}} - \frac{b^2d}{a} \sqrt{\frac{4a^4c}{b^2d}} + \frac{d^2}{c} \sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}}$$

19. Expresar en forma de intervalo los siguientes entornos:

$$E(-1,10), E^+(3,2), E^-(-8,3) \text{ y } E^*(1,5)$$

20. Define y representa gráficamente:

$$\text{a) } E(0, 3) \cup E(2, 3)$$

$$\text{b) } [-3, -1) \cap (-2, 5]$$

$$\text{c) } [-3, 0) \cap [-2, \infty)$$

21. Calcula:

$$\log_2 \frac{\sqrt[6]{64 \cdot 4^2}}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}} =$$

22. Si $\log 2 = 0'301$ y $\log 3 = 0'477$, halla:

$$\text{a) } \log 0'048 =$$

$$\text{b) } \log \frac{10'8}{\sqrt{14'4}} =$$

23. Calcula x:

$$\text{a) } \log_x 0'001 = 3$$

$$\text{b) } \log_9 x = 1$$

$$\text{c) } \log_{25} x = \frac{1}{2}$$

24. Calcula y representa gráficamente los siguientes conjuntos:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A \cap B \cap C$
- d) $A \cup C$

siendo: $A = E^+(0,5)$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 6\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x\}$$

25. Expresa en forma de intervalo y represéntalos gráficamente:

- a) $A = E^-(-5,6)$
- b) $B = E\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$
- c) $C = E^+\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x\}$
- e) $E = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 9\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$

26. Siendo $\log 2 = 0'301$ y $\log 3 = 0'477$, calcula:

- a) $\log\left(\frac{24}{27}\right)^2$
- b) $\log \frac{\sqrt{1'2}}{1'62}$
- c) $\log \frac{2^4}{16}$
- d) $\log 14'4$
- e) $\log 36.000$
- f) $\log \sqrt{5'76}$
- g) $\log(6'4 \cdot \sqrt{2'4})$
- h) $\log \frac{\sqrt[3]{9}}{5}$
- i) $\log \sqrt[4]{781'25}$
- k) $\log 0'015$

27. Halla el valor de x en las siguientes igualdades:

- a) $\log_5 x = 2$
- b) $\log_x 125 = 3$
- c) $\log_2 16 = x$

CUESTIONES

1. Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Todo número entero es racional.
- b) Hay números irracionales que son enteros.
- c) Todo número irracional es real.
- d) Algunos números enteros son naturales.
- e) Hay números decimales que no pueden ser expresados como una fracción.
- f) Todos los números decimales son racionales.
- g) Entre dos números enteros siempre hay otro número entero.
- h) Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.
- i) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
- j) Los números racionales llenan la recta.
- k) Los números irracionales llenan la recta.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, explica si es verdadero o falso:

- a) x^2 es siempre positivo o nulo.
- b) x^3 es siempre positivo o nulo.
- c) $\sqrt[3]{x}$ sólo existe si $x \geq 0$.
- d) x^{-1} es negativo si lo es x .
- e) $-x^2$ es siempre negativo.

3. ¿Cuál es la respuesta correcta?

$$a) (-27)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 3 \\ -3 \\ -9 \end{cases} \qquad b) 4^{\frac{-1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2^{-1} \\ -2 \end{cases}$$

4. Si $\log x = 9$, ¿cuál será el valor de $\log \frac{1}{x}$?

4. ¿Es cierto que $|-a| = a$ para todo número real a ? ¿Y $|-a| = -a$?