UNIDAD DIDÁCTICA 1:

NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

En esta unidad aprenderás a:

1. Identificar números naturales, enteros, racionales e irracionales.

2. Operar correctamente con números reales.

3. Operar correctamente con expresiones algebraicas.

4. Realizar correctamente las potencias de números reales y las operaciones con radicales.

5. Reconocer y definir los conjuntos más usuales de números reales (intervalos y entornos), así como sus uniones e intersecciones.

6. Manejar el concepto de logaritmo y sus propiedades.

7. Conocer el concepto de valor absoluto.

CONCEPTOS

1. Números racionales: definición. Expresión decimal y fraccionaria.

2. Números irracionales: definición.

3. Números reales: definición. Operaciones y propiedades. Densidad.

4. Potencias de exponente cualquiera.

5. Radicales: definición. Operaciones con radicales. Racionalización.

6. Intervalos y entornos. Unión e intersección.

7. Logaritmos: definición y propiedades. Cambio de base.

8. Valor absoluto. Definición y cálculo.

NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1. INTRODUCCIÓN

Los conjuntos de números van ampliándose a lo largo de la historia, a medida que surgen actividades que hacen necesario su uso.

Desde lo más rudimentario, contar, que da lugar a los números naturales **N** = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, pasando por repartir, que hace necesario el nacimiento de los números racionales **Q** = $\{a/b,\ b \neq 0\}$, comerciar con saldos negativos, que origina el conjunto de los números enteros **Z** = $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ y construir, comparar, edificar, medir… que requiere que el conjunto de números se amplíe de nuevo.

Construye un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Los números siempre han estado en el entorno y las actividades que nos rodean, haciéndose notar, a pesar del rechazo que ha generado la existencia de algunos de ellos, como el 0 y $\sqrt{-1}$.

Son sus grafías las que han experimentado una evolución asombrosa a lo largo de la historia, para responder a las necesidades crecientes en su uso hasta alcanzar la forma que tienen en la actualidad.

2. CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS

→ Números **NATURALES:** **N** = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

→ Números **ENTEROS:** Son los números naturales, sus opuestos y 0.

Z = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

→ Números **RACIONALES:** Se llama número racional al que puede expresarse como fracción de números enteros.

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}\ /\ a, b \in Z;\ \ b \neq 0\right\}$$

Su expresión decimal es exacta o periódica (pura o mixta).

Define, con los apuntes de cursos anteriores, qué se entiende por decimal exacto o periódico, y escribe cómo se realiza el paso de nº decimal a fracción y viceversa.

¿Cuál sería el resultado de estas operaciones? $\frac{3}{0}, \frac{0}{3}, \frac{0}{0}$

→ Números **IRRACIONALES:**

Los números irracionales, al contrario que los racionales, no pueden expresarse como cociente de números enteros, luego no pueden ser ni decimales exactos ni periódicos. Por tanto, los definimos como:

"El conjunto de números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales **no periódicas**". Dicho conjunto se designa con la letra **I**.

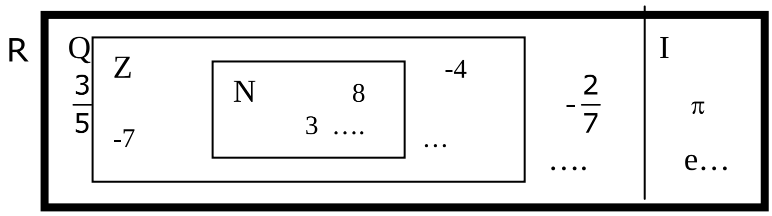
Son ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}$, π, e... Dado que no se puede conocer su valor exacto (por eso se designan con letras o símbolos), se suelen utilizar aproximaciones mediante números racionales cercanos. Por ejemplo $\pi \cong 3'1416$, $e \cong 2'7183$.

→ Números **REALES:**

Es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales. Se designa con la letra **R**. **R=Q ∪ I**

Se representan en la recta real asignando a cada punto un número. Entre cada dos números reales hay infinitos números reales.

¿Cuál es el número real siguiente a 1? ¿y el anterior a 2? ¿Son consecutivos los números reales?



Actividades

1. Clasifica los siguientes números indicando cuál es el conjunto (N, Z, Q, R) más pequeño al que pertenecen:

$$5,\ -7,\ 0'23,\ 5/4,\ \sqrt{\frac{18}{2}},\ -\sqrt{3},\ \sqrt[3]{-5},\ \frac{-\pi}{2},\ 4'7,\ \sqrt{-4}$$

2. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

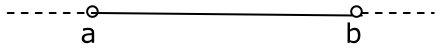
a) 3'222... **b)** $\sqrt{7}$ **c)** -0'1010010001...
d) -3'28888... **e)** 0'4353535... **f)** $\sqrt{11}$
g) 120'143143... **h)** $\sqrt{121}$

3. INTERVALOS Y ENTORNOS

Los números reales pueden representarse en la recta real agrupados en intervalos y entornos:

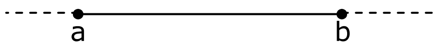
- Intervalo **abierto**:

$(a,b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$



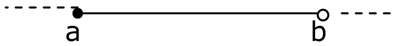
- Intervalo **cerrado:**

$[a,b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$

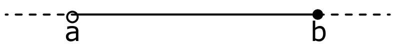


- Intervalo **semiabierto o semicerrado**:

$[a,b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$

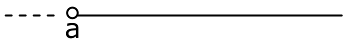


$(a,b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$

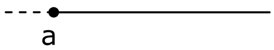


- Intervalos **infinitos**:

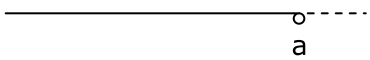
$(a,\infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$



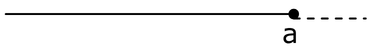
$[a,\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$



$(-\infty,a) = \{x \in R \,/\, x < a\}$

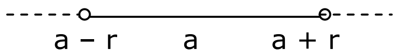


$(-\infty,a] = \{x \in R \,/\, x \leq a\}$



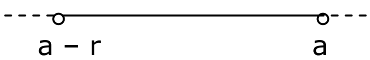
- Entorno **simétrico de centro a y radio r**:

$E(a,r) = (a-r, a+r)$



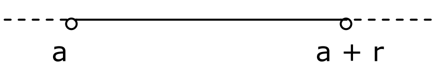
- Entorno **lateral por la izquierda de centro a y radio r**:

$E^-(a,r) = (a-r, a)$



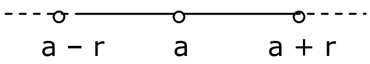
- Entorno **lateral por la derecha de centro a y radio r**:

$E^+(a,r) = (a, a+r)$



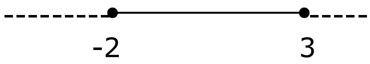
- Entorno **reducido** de centro a y radio r:

$$E^*(a,r) = (a-r, a+r) - \{a\}$$

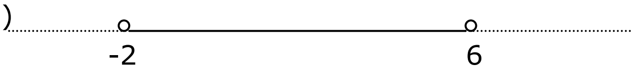


Ejemplo:

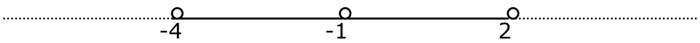
[-2,3]



E(2,4) = (-2,6)



$E^*(-1,3) = (-4,2) - \{-1\}$



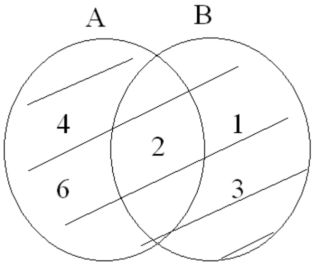
UNIÓN: Se define la unión de dos conjuntos A y B como el conjunto formado por todos los elementos de ambos conjuntos. Se escribe $A \cup B$.

INTERSECCIÓN: Se define la intersección de dos conjuntos A y B como el conjunto formado por los elementos comunes de ambos conjuntos. Se escribe $A \cap B$.

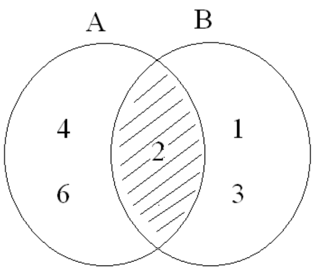
Ejemplos:

1) A = {2, 4, 6}
B = {1, 2, 3}

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}
$A \cap B$ = {2}



$A \cup B$



$A \cap B$

2) [-3,5) ∪ (2,9) = [-3,9)
[-3,5] ∩ (2,9) = (2,5]
(2,4] ∩ [6,8] = ∅ (∅ significa conjunto vacío: que no contiene ningún elemento)

Representa gráficamente los intervalos y comprueba los resultados.

Actividades

3. Representa los siguientes conjuntos numéricos:

a) $(-3,-1)$ **b)** $\{x \,/\, -2 \leq x < 5\}$ **c)** $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$
d) $[4,+\infty)$ **e)** $[-2,5) \cup (5,7]$ **f)** $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

4. Expresa como desigualdad y como intervalo y representa:

a) x es menor que – 5.
b) 3 es menor o igual que x.
c) x está comprendido entre – 5 y 1.
d) x está entre – 2 y 0, ambos incluidos.

5. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a. $E^*(-5,6)$ **c)** $E^-\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$

b. $E^+\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ **d)** $E\left(0,\frac{4}{7}\right)$

6. Identifica los entornos $E(-1,6)$, $E^*(0,4)$, $E^-(5,2)$ y $E^+(0,6)$ con el conjunto que le corresponda:
a) $A = \{x \in R \,/\, 0 < x < 6\}$
b) $B = \{x \in R \,/\, -7 < x < 5\}$
c) $C = \{x \in R \,/\, -4 < x < 4\} - \{0\}$
d) $D = \{x \in R \,/\, 3 < x < 5\}$

4. VALOR ABSOLUTO

Se define el valor absoluto de un número real como su distancia al 0, es decir, el valor absoluto de un número **a** es el propio número **a**, si éste es positivo, y su opuesto **–a**, si es negativo (Recuerda que si **a** es negativo, **-a** es positivo). Se escribe $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|7| = 7$
$|-7| = 7$
$|x| = 4 \Rightarrow x = 4 \,,\, x = -4$
$|x-5| = 2$
$x-5=2 \Rightarrow x=7$
$x-5=-2 \Rightarrow x=3$

Actividades

7. Hallar el valor absoluto de: 7'4, 0, - 5'87.

8. ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes igualdades?

a) $|x| = 3$ **b)** $|x| = 0$ **c)** $|x+1| = 3$ **d)** $|x| = \sqrt{3}$

9. ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?

a) $|x| < 3$ **b)** $|x| \geq 3$

5. NÚMEROS REALES. OPERACIONES. (*REPASO*)

5.1. SUMA

$a + b \in R, \ \forall a, b \in R$ (la suma de dos números reales siempre es otro nº real. La suma es una operación interna)

- **Propiedades:**

a) Conmutativa: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in R$
b) Asociativa $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in R$
c) Elemento neutro: $0 \in R \quad a + 0 = a$
d) Elemento opuesto: $\forall a \in R, \exists -a \in R \,/\, a + (-a) = 0$

($\forall$ significa: para todo o para cualquier)

Por cumplir estas cuatro propiedades, se dice que R es un GRUPO ABELIANO respecto a la suma.

5.2. PRODUCTO

$a \cdot b \in R, \ \forall a, b \in R$ (el producto de números reales también es una operación interna).

- **Propiedades:**

a) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R$
b) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in R$
c) Elemento neutro: $1 \in R \quad a \cdot 1 = a$
d) Elemento inverso: $\forall a \neq 0 \in R, \quad \exists \frac{1}{a} \in R \quad / \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Se deduce que el conjunto de los números reales (R), es también GRUPO ABELIANO respecto al producto. Además también se cumple:

Distributiva respecto a la suma

$$\forall a, b, c \in R, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por cumplir estas 9 propiedades se dice que R tiene estructura de CUERPO CONMUTATIVO respecto a la suma y el producto.

5.3. RESTA

Por existir elemento opuesto, podemos definir la resta como la suma con el opuesto $a - b = a + (-b)$

5.4. COCIENTE

Por existir elemento inverso $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$

5.5. POTENCIACIÓN. PROPIEDADES

a) Potencias de exponente entero: a^n donde $a \in R$, $n \in Z$

- Si $n > 0$ $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)
- Si $n = 0$ $a^0 = 1$ (ya que $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$)
- Si $n < 0$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ $(\text{ya que } a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1)$

b) Potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{ya que} \quad (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $(a : b)^m = a^m : b^m$

Intenta justificar las igualdades anteriores

5.6. RADICACIÓN. OPERACIONES CON RADICALES

- **Definición:**

Radical es toda expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ donde a es el radicando y n es el índice de la raiz, siendo:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- **Operaciones**

a) Suma: Sólo se pueden sumar radicales cuando al simplificarlos, tienen el mismo índice y el mismo radicando, extrayendo como factor común dicho radical

$$b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c)\sqrt[n]{a}$$

b) Producto :

- Si los radicales tienen el mismo índice: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ porque $a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}$
- Si tienen distinto índice hay que reducirlos previamente a índice común buscando su m.c.m.

> *Ejemplo:*
>
> $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt[4]{5a^7b^3c}=\sqrt[12]{3^4(a^2)^4b^4 5^3(a^7)^3(b^3)^3c^3}=\sqrt[12]{3^4 5^3a^{29}b^{13}c^3}=a^2b\sqrt[12]{3^4 5^3a^5bc^3}$

c) Cociente :

- Si los radicales tienen el mismo índice: $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$ porque $a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=(a:b)^{\frac{1}{n}}$
- Si tienen distinto índice hay que reducirlos previamente a índice común buscando su m.c.m.

d) Potenciación :

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ porque $(a^{1/n})^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

e) Radicalización :

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ porque $(a^{1/n})^{1/m}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

f) Racionalización

- Racionalización de denominadores:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ multiplicamos y dividimos por $\sqrt{b}$

b) $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

c) $\dfrac{a}{b\pm\sqrt{c}}$ multiplicamos numerador y denominador por el conjugado.

Ejemplos:

1. $\dfrac{2x}{\sqrt{2}} = \dfrac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2x\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$

2. $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\sqrt[5]{2^2}} = \dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[5]{2^2}}{2}$

3. $\dfrac{2}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})} = \dfrac{2(3+\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{2(3+\sqrt{3})}{6} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Actividad

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+5-3\left(4:\dfrac{3}{5}+1\right) =$

b) $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a+c)^3 =$

c) $7\sqrt{54}-3\sqrt{18}+\sqrt{24}-\dfrac{3}{5}\sqrt{50}-\sqrt{6} =$

d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} =$

e) $\sqrt[6]{12}\left(5\sqrt{3}:\sqrt[3]{9}\right)-\left(\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{4}{3}}\right) =$

f) $\left(\dfrac{-2\cdot(-4)^2}{2^3}\right)^3-\left(\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2:\dfrac{3}{4}\right)^4 =$

g) $\dfrac{3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot(2x)^{\frac{1}{3}}}{3\cdot(3x^3)^{\frac{1}{2}}} =$

h) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-3}{5}}\cdot\left[\left(\dfrac{b}{a}\right)^3\cdot a^{-1}\right]^{\frac{4}{3}} =$

i) $\sqrt[4]{b\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}\cdot\sqrt[3]{b\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{b}}}}} =$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}\cdot\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}} =$

k) Racionaliza:

a) $\dfrac{3xy^2}{\sqrt[3]{x^2y}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{5}}$ d) $\dfrac{7}{\sqrt[5]{3^2\cdot 2\cdot 5^3}}$

6.- LOGARITMO DE UN NÚMERO. PROPIEDADES

Seguramente, serías capaz de resolver la ecuación: $2^x \cdot 2 = 64$, aunque la incógnita (x) esté en el exponente. Para ello, bastaría con expresar toda la igualdad en base 2:

$$2^{x+1} = 2^6 \Rightarrow x+1 = 6 \Rightarrow x=5.$$

Sin embargo, resultaría más difícil despejar con precisión la incógnita en esta ecuación:

$$2^x \cdot 2 = 40$$

ya que, siguiendo la estrategia anterior: $2^{x+1} = 40$, sólo podríamos dar un valor aproximado a x, pues 40 no es potencia de 2. Deducimos que x+1 debe ser 5'??.. pues $2^5 = 32$ y $2^6 = 64$. Por tanto, x= 4'??? . Podríamos buscar con la calculadora una buena aproximación, probando con distintos valores.

No obstante, parece conveniente definir alguna herramienta matemática útil cuando se trata de manejar exponentes.

Sabemos que en toda potencia aparecen tres elementos: base, exponente y potencia o resultado. $2^3 = 8$

Necesitamos conocer dos de los tres elementos para calcular el tercero:

a) Si conocemos la base y el exponente: $2^3 = \square$ y debemos calcular el resultado, la operación se llama POTENCIA y te resulta conocida.

b) Si disponemos del exponente y la potencia: $\square^3 = 8$ y tenemos que calcular la base, la operación se llama RADICACIÓN y, aunque la has estudiado anteriormente, se escribe con otro formato: $\sqrt[3]{8} = \square$

c) La tercera posibilidad es que conozcamos la base y el resultado de la potencia: $2^{\square} = 8$

Es entonces cuando debemos calcular el exponente. Esto es lo que conocemos con el nombre de LOGARITMO. Logaritmo es un sinónimo de exponente

LOGARITMO ≡ EXPONENTE

También se escribe con otro formato: $\log_2 8 = \square$
Se lee "logaritmo en base 2 de 8 "

Ejemplos:

a) $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$ b) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$

Si no consigues hacerlo mediante cálculo mental, puedes llamarle **x** y pasar al formato potencia, es decir:

$$\log_3 \sqrt{27} = x \quad \Rightarrow \quad 3^x = \sqrt{27} \;\Rightarrow\; 3^x = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; 3^x = 3^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

$$\text{luego} \quad \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$$

Actividad

11. Completa los siguientes logaritmos:

$\log_3 9 =$ $\qquad$ $\log_3 \sqrt{3} =$ $\qquad$ $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$ $\qquad$ $\log_7 1 =$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} =$ $\qquad$ $\log_{\sqrt{5}} 5 =$ $\qquad$ $\log_4 \frac{1}{64} =$ $\qquad$ $\log_2 \sqrt{\frac{1}{4}} =$

Ahora que comprendes el concepto, vamos a escribir una definición precisa del concepto de logaritmo:

Definición:

Se define el logaritmo en base *a* de *b*, como el exponente **x** al que hay que elevar *a* para obtener *b*, es decir

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Cuando se manejan números muy grandes o muy pequeños, es más cómodo utilizar sólo los exponentes. ¿Sabías que los números de la escala de Richter que miden la fuerza de los terremotos, son logaritmos?

Calcula ahora los siguientes logaritmos:

$\log_1 3 =$ $\qquad$ $\log_2 -4 =$ $\qquad$ $\log_2 0 =$ $\qquad$ $\log_{-2} 4 =$

Si has encontrado dificultades para resolverlos, quizá hayas llegado a alguna de las siguientes conclusiones:

Características:

1) La base *a* tiene que ser un nº positivo y distinto de 0 y 1, ya que una base negativa puede dar lugar a potencias no reales: $(-1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-1)^3} = \sqrt{-1}$?????
(en la unidad 5 veremos los números complejos, que surgen de las raíces de números negativos).

Además, no tiene sentido hablar de $\log_1 3$ ó $\log_0 5$, pues cualquier potencia de 1 es igual a 1 (nunca podría ser 3), y cualquier potencia de 0 sería 0, es decir, sólo existirían $\log_1 1$ y $\log_0 0$ y serían iguales a todos los números reales.

2) Por otra parte, <u>la potencia b no puede ser negativa ni 0,</u>

Razona por qué y escríbelo.

Potencia b>0

$$\log_a b = c$$

Exponente c
cualquier nº real

Base
a>0
$a \neq 1$

3) Los logaritmos más utilizados son los de base 10, llamados **logaritmos decimales**, en los que no es necesario precisar la base, ($\log_{10} b = \log b$) y los **logaritmos neperianos**, de base el nº $e \cong 2'7182...$ cuya notación es $\text{Ln}a = \log_e a$.

<u>Ejemplos:</u>	log100=2, log0'1= -1 Lne=1

Calcula los siguientes logaritmos:

$\log_a 1 =$
$\log_a a =$
$\log_a a^3 =$
$\text{Ln}e^x =$

<u>Propiedades de los logaritmos:</u>

Recuerda siempre que un logaritmo es un exponente y, por tanto, debe cumplir las mismas propiedades.

Sabemos que al multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes ya que: $a^3 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}\cdot \underbrace{a \cdot a} = a^5 \Rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Si el exponente del producto es la suma de los exponentes, el logaritmo del producto debe ser la suma de los logaritmos, es decir:

1) $$\mathbf{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Por la misma razón, y dado que el exponente del cociente de dos potencias es la resta de los exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ se cumplirá que el logaritmo del cociente es la resta de los logaritmos:

2) $$\mathbf{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Por último, al elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ya que $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$,
Luego debe cumplirse que:

$$\textbf{3)} \qquad \mathbf{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

(recuerda que tanto n como el $\log_a b$ son los exponentes)

Esta última propiedad puede razonarse de otra manera, utilizando la propiedad 1:

$$\log_a b^n = \log_a(\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\text{n veces}}) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \ldots + \log_a b}_{\text{n veces}} = n \cdot \log_a b$$

Ejemplos:

1) Conocido el log 2=0'301 , calcula log20 y log0'08

log20 = log(2·10) = log2+log10 = 0'301+1 = 1´301

$\log 0'08 = \log \frac{8}{100} = \log 8 - \log 100 = \log 2^3 - \log 100 = 3 \cdot \log 2 - 2 = 3 \cdot 0'301 - 2$

2) Sabiendo que logx+log3 = log12, halla x

$\log(x \cdot 3) = \log 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Como has podido observar, estas propiedades nos permitirán obtener otros logaritmos a partir de uno o varios conocidos, o despejar incógnitas afectadas por logaritmos.

También es cierto que la mayoría de los logaritmos son números irracionales difíciles de precisar. Además, la infinidad de bases posibles hace más difícil la tarea. Por eso, tan sólo se manejan con asiduidad las bases 10 y e, que son las que puedes encontrar en cualquier calculadora.

Pero entonces, ¿cómo calcular $\log_3 5$?

Muy sencillo, se ha encontrado una fórmula que permite el paso de una base a otra.

Fórmula del cambio de base

Para pasar de base *a* a base *b*

$$\boxed{\mathbf{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}}$$

Sería entonces cierto que pasando a base 10 y utilizando la calculadora:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0'698}{0'477} = 1'465$$

Vamos a demostrar esta fórmula utilizando el formato de potencia, que resulta más familiar.

Demostración

Para ello, nombramos con una letra a cada logaritmo:

$\log_a x = p$, $\log_b x = q$ y $\log_b a = s$. Queremos demostrar que $p = \frac{q}{s}$

Se cumple que: $\left.\begin{array}{l} \text{si } \log_a x = p \Rightarrow a^p = x \\ \text{si } \log_b x = q \Rightarrow b^q = x \\ \text{si } \log_b a = s \Rightarrow b^s = a \end{array}\right\} \Rightarrow a^p = b^q \Rightarrow (b^s)^p = b^q$

Sustituyendo a por b^s

Luego, $\left(b^s\right)^p = b^q \Rightarrow b^{sp} = b^q \Rightarrow sp = q \Rightarrow p = \frac{q}{s}$ como queríamos demostrar

c.q.d.

Por último, vamos ahora a resolver la ecuación que habíamos planteado al principio de este apartado:

$2^x \cdot 2 = 40 \Rightarrow 2^{x+1} = 40 \Rightarrow \log_2 40 = x+1 \Rightarrow \frac{\log 40}{\log 2} = x+1 \Rightarrow$

$x+1 = \frac{1'602}{0'301} \Rightarrow x+1 = 5'322 \Rightarrow x = 4'322$

Actividades

12. Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} =$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 =$

13. Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{4} = 2$ **c)** $\log_x 0'04 = -2$

d) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ **e)** $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

14. Sabiendo que log 3 = 0’477, calcula el logaritmo decimal de 30, 300, 3000, 0’3, 0’03, 0’003.

15. Sabiendo que log k = 14’4 calcula:

a) $\log\frac{k}{100}$ **b)** $\log\left(0'1\cdot k^2\right)$ **c)** $\log\sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ **d)** $\left(\log k\right)^{\frac{1}{2}}$

16. Si log k = x, escribe en función de x:

a) $\log k^2$ **b)** $\log\frac{k}{100}$ **c)** $\log\sqrt{10k}$

17. Comprueba que $\dfrac{\log\frac{1}{a}+\log\sqrt{a}}{\log a^3}=\dfrac{-1}{6}$

18. Siendo log 2 = 0’301 y log 3 = 0’477 calcula:

a) log 5 **b)** log 24 **c)** log 18 **d)** $\log\frac{8}{3}$

EJERCICIOS

1. Indica si es verdadero o falso:

a) $[1,+\infty) \subset (1,+\infty)$
b) $\varnothing \subset (-1,1)$
c) $(-\infty, \infty) \subset [0,+\infty)$
d) $(-1,1) \subset [-1,1)$

** El símbolo $\subset$ significa "contenido en" A está contenido en B: $A \subset B$**

2. Dados los conjuntos:

a. $A = \{ x \in R \,/\, -7 \leq x < 4 \}$
b. $B = \{ x \in R \,/\, 4 \leq x < 6 \}$
c. $C = \{ x \in R \,/\, 0 < x < 5 \}$

Calcula:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $(A \cup B) \cap C$
d) $A \cap B \cap C$ **e)** $A \cap (B \cup C)$ **f)** $A \cup B \cup C$

3. Realiza las siguientes operaciones:

l) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}-\dfrac{x}{4}-x\right)=$

m) $\dfrac{5^2 \cdot 7^{-3} \cdot 5^{-4}}{7^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-1}}=$

4. Calcula:

a) $\log_2 1024 =$ **b)** $\log_2 \dfrac{1}{64} =$ **c)** $\log_3 \sqrt{3} =$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ **e)** $\log 0'001 =$ **f)** $\log_{\sqrt{3}} 3 =$

g) $\log_2 \sqrt{8} =$ **h)** $\log_\pi 1 =$

5. Sabiendo que log 2 = 0'301, calcula:

a) $\log \sqrt[3]{0'02}$ **b)** $\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$ **c)** $\log \sqrt{\dfrac{0'025}{8}}$ **d)** $\log \sqrt[5]{\dfrac{1}{0'32}}$

6. Sabiendo que log 3 = 0'477, ¿cuánto valdrá $\log_3 10$?

7. Sabiendo que $\log_a b = 3$ y $\log_a 9b = 5$, ¿cuál será el valor de a?

8. ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?

i. log a − log b = 0
ii. log a = log b + log 2
iii. log a = 2 log b
iv. log a = 1 + log b

9. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=$

b) 5 − (- 2) + (- 8) − (- 4) − 5 =

c) 7 − (- 3) · (- 8) − 3 : (- 1) + 5 =

d) $3-4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\right)\right]=$

e) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}=$

f) $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\left(x^4+x^3\right)=$

g) $\sqrt{(3-2x)^3}+\sqrt{12-8x}-\sqrt{3x^2-2x^3}=$

h) $\left(\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(2-\frac{1}{3}\right)\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1}=$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{5\cdot 2}{3}:\frac{6}{5}\right)^{-2}-\left(4\cdot\frac{1}{3}:\frac{6}{5}\right)^{-3}=$

j) $\frac{\left(2+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{7}\right)}{\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{7}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)}=$

k) $\frac{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}:\sqrt{a}}{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}:\sqrt[8]{a}}=$

l) $\left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}}\right):\sqrt{\frac{2b}{a}}=$

10. De los siguientes números di cuáles son racionales y cuáles irracionales. Añade también si son periódicos o no indicando, si existe, cuál es el período.

a) 7’64	b) 0’23414141...
c) 1’7320	d) 6’12354635463546...
e) $\sqrt{3}$	f)3’07007000700007...
g) 0’6666....	h) 6

11. Extrae factores de los siguientes radicales:

1) $\sqrt{8}$	2) $3\cdot\sqrt{8a^3}$	3) $2x^2y\sqrt{x^4y^3}$
4) $\sqrt[5]{\frac{5x^{10}}{y^8}}$	5) $\sqrt[4]{\frac{32x^6}{81y^5}}$	6) $4\sqrt{8b^3a^7}$

12. Realiza las siguientes operaciones:

1) $\left[(-3)^2\right]^3 =$

2) $(-4)^5 : (-4)^3$

3) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\right]^3$

4) $\left[\frac{(-2)\cdot(-3)^3}{9}\right]^2$

5) $\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{-3}{5}\right)^{15} - \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

6) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}$

7) $\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

8) $\left(-\sqrt{2}\,xy^3\right)^3$

9) $x^2 x^3 x^{-1} x$

10) $\left[(-a)^3\right]^{-3}$

11) $\left(2\sqrt[3]{\frac{5xy^3}{z^2}}\right)^5$

12) $5^{\frac{-3}{2}}$

13) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

14) $-\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$

15) $(0'64)^{-0'5}$

16) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64}$

17) $\sqrt[3]{(2197)^4}$

18) $\sqrt[5]{0'00032}$

19) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

20) $\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[4]{32}}}$

13. Introduce factores bajo el signo radical:

1) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$ 2) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$ 3) $\frac{3}{2xy}\sqrt{\frac{2xz}{y}}$

4) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 5) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{-5}{7}}$

14. Escribe en forma de potencias los radicales:

1) $\sqrt{3x^5}$ 2) $\sqrt[4]{ab^2}$ 3) $\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{5}\right)^3}$ 4) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

5) $\sqrt[5]{\frac{a+1}{a-1}}$ 6) $\frac{2b\sqrt[3]{3x}}{3\sqrt{x}}$

15. Escribe como radicales las potencias:

1) $(2-x)^{\frac{5}{2}}$ 2) $5^{\frac{-2}{5}}$ 3) $4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{-1}{2}}z^{\frac{3}{4}}$

4) $\frac{3+2^{-1}}{3-4^{\frac{-1}{5}}}$ 6) $3a^{\frac{3}{2}}\left[5^{\frac{2}{3}}\left(3ab^2-5\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{7}$

b) $\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{ab}$

c) $5\sqrt{12}+7\sqrt{48}-\sqrt{108}-\sqrt{192}+\sqrt{243}$

d) $\sqrt{2b}:\sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}}$

e) $2\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[4]{3}\right)$

f) $3\sqrt{x}-\sqrt{4x}+2\sqrt{36x}-5\sqrt{x-\frac{9x}{25}}$

g) $\sqrt{xy}\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2y}\right)$

h) $\left(\sqrt{3-a}-\sqrt{3+a}\right)\left(\sqrt{3-a}+\sqrt{3+a}\right)-2a$

i) $\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt{\frac{1}{x-1}}$

j) $\sqrt{\frac{a}{2b}}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}\right)$

k) $\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$

l) $\sqrt[12]{125}:\sqrt[8]{25}$

m) $\frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$

n) $\sqrt{75a^3b^2}+\sqrt{3ab^4}$

ñ) $3\cdot\sqrt[3]{\frac{2x}{9}}-2\cdot\sqrt[3]{\frac{3x}{4}}+5\cdot\sqrt[3]{\frac{6x}{125}}$

o) $\frac{3^{-2}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3^{\frac{-4}{3}}}$

p) $\frac{\left[\left(a^{-3}\right)^{-2}\right]^4\cdot\left(ab^{-1}\right)^3\cdot\left(b^3\right)^2}{\left(b^{-1}a^2\right)^{-1}\cdot a^{-2}\cdot(-a)^4\cdot b^{-1}}$

q) $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{9x^2-9y^2}+\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{25xy^2-25y^3}{x+y}}$

17. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{15}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{7}{\sqrt[5]{3^2\cdot 2\cdot 5^3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{4-\sqrt{3}}}$

f) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

g) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$

i) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$

j) $\dfrac{4-a^2}{-\sqrt{a}+\sqrt{2}}$

k) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{3-\sqrt{3}}}}$

l) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9\sqrt{2}}}$

18. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\left(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{72}\right)\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\dfrac{a}{b}}}$

c) $\dfrac{2\left[\left(2+\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{5}{6}\right]-3\left(\dfrac{4}{5}+2\right)}{\dfrac{2}{5}}$

d) $\left[\left(\dfrac{3}{2}-4\right):\left(1-\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\right]^4-\left(1+\dfrac{2}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^3$

e) $\left[\left(\dfrac{-3}{5}\right)^3\cdot\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2\right]^3:\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{15}-\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

f) $4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{3}{5}\sqrt{75}$

g) $5\cdot\sqrt[6]{8}-3\cdot\left(\sqrt{4}+\sqrt[10]{32}\right)-8\cdot\sqrt[8]{16}+\sqrt{\frac{1}{8}}$

h) $\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{2a^2b^2}\cdot ab$

i) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}:\sqrt[4]{a^3}}{\dfrac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}}}$

j) $\dfrac{(pq)^3\left(p^2q^3\right)^2}{\left(p^2q^2\right)^{-2}}$

k) $\sqrt{\frac{m+n}{m^2}}\cdot\sqrt{\frac{m-n}{m}}\cdot\sqrt{\frac{m^2+n^2}{n^2}}$

l) $\dfrac{\sqrt{ax}\cdot\sqrt[3]{xa^2}}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[6]{a^5x}}$

m) $\frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}}-\frac{b^2d}{a}\sqrt{\frac{4a^4c}{b^2d}}+\frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}}$

19. Expresar en forma de intervalo los siguientes entornos:

E (-1,10), E^+ (3,2), E^- (-8,3) y E*(1,5)

20. Define y representa gráficamente:

a) E (0, 3) $\cup$ E (2, 3)
b) [- 3, - 1) $\cap$ (-2, 5]
c) [- 3, 0) $\cap$ [- 2, ∞)

21. Calcula:

$$\log_2 \frac{\sqrt[6]{64\cdot 4^2}}{2^5\cdot\sqrt[3]{512}}=$$

22. Si log 2 = 0'301 y log 3 = 0'477, halla:

a) $\log 0'048=$

b) $\log\dfrac{10'8}{\sqrt{14'4}}=$

23. Calcula x:

a) $\log_x 0'001=3$

b) $\log_9 x=1$

c) $\log_{25} x=\frac{1}{2}$

24. Calcula y representa gráficamente los siguientes conjuntos:

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \cap B \cap C$
d) $A \cup C$

siendo: $A = E^{+}(0{,}5)$
$B = \{x \in R \,/\, 4 \leq x < 6\}$
$C = \{x \in R \,/\, 2 < x\}$

25. Expresa en forma de intervalo y represéntalos gráficamente:

a) $A = E^{-}(-5{,}6)$
b) $B = E\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$
c) $C = E^{+}\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
d) $D = \{x \in R \,/\, 5 \leq x\}$
e) $E = \{x \in R \,/ -3 \leq x \leq 9\}$
f) $F = \{x \in R \,/ -2 < x \leq 3\}$

26. Siendo log 2 = 0’301 y log 3 = 0’477, calcula:

a) $\log\left(\frac{24}{27}\right)^2$
b) $\log\frac{\sqrt{1'2}}{1'62}$
c) $\log\frac{2^4}{16}$
d) $\log 14'4$
e) $\log 36.000$
f) $\log\sqrt{5'76}$
g) $\log\left(6'4 \cdot \sqrt{2'4}\right)$
h) $\log\frac{\sqrt[3]{9}}{5}$
i) $\log\sqrt[4]{781'25}$
k) $\log 0'015$

27. Halla el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_5 x = 2$
b) $\log_x 125 = 3$
c) $\log_2 16 = x$

CUESTIONES

1. Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Todo número entero es racional.
b) Hay números irracionales que son enteros.
c) Todo número irracional es real.
d) Algunos números enteros son naturales.
e) Hay números decimales que no pueden ser expresados como una fracción.
f) Todos los números decimales son racionales.
g) Entre dos números enteros siempre hay otro número entero.
h) Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.
i) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
j) Los números racionales llenan la recta.
k) Los números irracionales llenan la recta.

2. Si $x \in R$, explica si es verdadero o falso:

a) x^2 es siempre positivo o nulo.
b) x^3 es siempre positivo o nulo.
c) $\sqrt[3]{x}$ sólo existe si $x \geq 0$.
d) x^{-1} es negativo si lo es x.
e) $-x^2$ es siempre negativo.

3. ¿Cuál es la respuesta correcta?

a) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 3 \\ -3 \\ -9 \end{cases}$ b) $4^{\frac{-1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2^{-1} \\ -2 \end{cases}$

4. Si log x = 9, ¿cuál será el valor de $\log \frac{1}{x}$?

5. ¿Es cierto que $|-a| = a$ para todo número real a? ¿Y $|-a| = -a$?

UNIDAD DIDÁCTICA 2:

ECUACIONES Y SISTEMAS

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Resolver ecuaciones de primer y segundo grado de forma analítica, e interpretar gráficamente las soluciones.
2. Resolver ecuaciones sencillas de grado superior y bicuadradas.
3. Resolver ecuaciones radicales, exponenciales y logarítmicas.
4. Resolver y clasificar sistemas de hasta tres ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante los métodos de sustitución, igualación, reducción y Gauss.
5. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
6. Plantear y resolver problemas mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
7. Manejar el método gráfico de resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una y dos incógnitas.
8. Resolver problemas de programación lineal.

CONCEPTOS

1. Ecuación: concepto y clasificación.
2. Ecuaciones de primer y segundo grado: resolución y significado geométrico.
3. Ecuaciones de grado superior, radicales, exponenciales y logarítmicas: concepto y resolución.
4. Sistemas de ecuaciones lineales: concepto y clasificación.
5. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: métodos de resolución (reducción, sustitución e igualación) y significado geométrico.
6. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas: método de Gauss.
7. Sistemas de ecuaciones no lineales.
8. Sistemas de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas: resolución
9. Programación lineal.

ECUACIONES Y SISTEMAS

1. ECUACIONES

Definición: Se llama ecuación a toda igualdad entre dos expresiones algebraicas. En ellas intervienen cantidades desconocidas llamadas **incógnitas.** Los valores de las incógnitas para los que se cumple la igualdad se llaman **soluciones.**

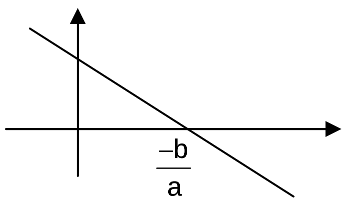
Ejemplos:

$3x+y=5$	($x=0$ $y=5$) es una solución. *¿puedes encontrar más? ¿cuántas soluciones hay?*
$2x^2+x-1=0$	*¿cuántas soluciones tiene? hállalas*
$x-2 = x+5$	*¿cuántas soluciones tiene? ¿qué puedes deducir?*

2. ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

Son de la forma $ax+b=0$, con $a\neq 0$.

Su solución es $x = \frac{-b}{a}$ y coincide con el punto de corte con el eje X de la recta $y = ax + b$.



(Observa que si queremos hallar los puntos de corte con el eje X de la función $y=ax+b$, debemos hacer $y=0$, es decir, $ax+b=0$, lo que supone resolver la ecuación).

3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$, $a,b,c \in R$. Recuerda que sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Pueden darse tres casos:

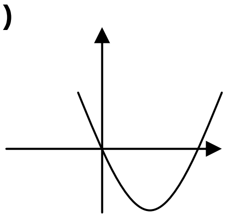
a) Si $b^2-4ac > 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales.

b) Si $b^2-4ac = 0 \Rightarrow$ existe una única solución real doble.

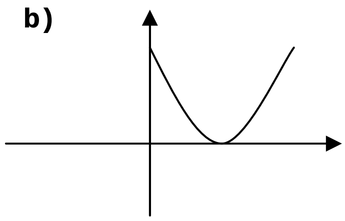
c) Si $b^2-4ac < 0 \Rightarrow$ no existe solución real, sino compleja.

Gráficamente las soluciones coinciden con los puntos de corte en el eje X de la parábola $y = ax^2+bx+c$

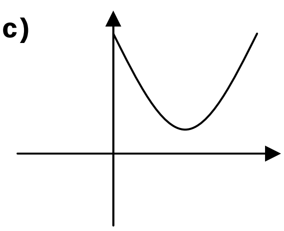
a)



b)



c)



Actividad

1. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

b) $\dfrac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \dfrac{x^2+2}{2}$

4. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

a) **Ruffini:** *investiga sobre ello repasando tus apuntes del año anterior. Te facilitamos un ejemplo.*

Ejemplo:

Resuelve la ecuación: $\mathbf{x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 9x + 30 = 0}$

	1	- 3	- 13	9	30
- 2		- 2	10	6	-30
	1	- 5	- 3	15	0
5		5	0	- 15	
	1	0	- 3	0	

$x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 9x + 30 = 0$ equivale a:

$(x+2)(x-5)(x^2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$(x+2)(x-5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$ $x+2=0$, $x-5=0$, $x-\sqrt{3}=0$ ó $x+\sqrt{3}=0$

Las soluciones son: $x = -2,\ 5,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$

Actividad

2. Resolver las siguientes ecuaciones de grado superior:

a) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

b) $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4 = 0$

c) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

d) Escribe un polinomio cuyas raíces sean 1, 4, -4, 0.

e) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

f) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$

g) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$

h) $2x^4 - x^3 - 11x^2 - 11x - 3 = 0$

b) Ecuaciones bicuadradas:

Son de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

Una ecuación bicuadrada se puede reducir a una ecuación de 2º grado, haciendo el cambio $x^2 = z \quad \Rightarrow \quad (x^4 = z^2)$

Ejemplo:

Resuelve la ecuación: $\mathbf{x^4 - 13x^2 + 36 = 0}$

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \Rightarrow z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$z = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Soluciones: x=3,-3, 2 y -2.

La descomposición factorial sería: $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2) = 0$

Compruébalo utilizando Ruffini

Actividad

3. Resolver las siguientes ecuaciones de grado superior:

a) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

d) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

e) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

5. ECUACIONES IRRACIONALES

Definición: Son aquellas en las que la incógnita aparece bajo el signo radical.

Ejemplo:

Resuelve la ecuación: $\mathbf{\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7}$

* Aislamos una de las raices $\Rightarrow \sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$
* Elevamos al cuadrado ambos miembros (el segundo miembro es una identidad notable) $\Rightarrow x+5 = 49 - 14\sqrt{2x+8} + 2x + 8$
*Volvemos a aislar la raiz agrupando términos que sean semejantes

$$14\sqrt{2x+8} = x + 52$$

* Elevamos otra vez al cuadrado $\Rightarrow 196(2x+8) = x^2 + 104x + 2704$
* Agrupamos términos $\Rightarrow x^2 - 288x + 1136 = 0$ (ecuación de segundo grado)

$$x = \frac{288 \pm \sqrt{82944 - 4544}}{2} = \frac{288 \pm \sqrt{78400}}{2} = \frac{288 \pm 280}{2} =$$

$= \begin{cases} x = 4 \text{ si es solución} \\ x = 284 \text{ no es solución. ¿Por qué?} \end{cases}$

Compruébalo

IMPORTANTE: **Debes verificar todas las soluciones** pues hay muchas posibilidades de que aparezcan soluciones falsas.

Investiga por qué.

Actividad

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x-1} - x + 7 = 0$

b) $3x - 3\sqrt{x+3} = x + 3$

c) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

d) $x - \sqrt{3x-5} = 3$

e) $\sqrt{6-3x} - \sqrt{3-x} = 1$

f) $\sqrt{1-4x} + \sqrt{x+3} = 4$

6. ECUACIONES EXPONENCIALES

Definición: Son aquellas cuya incógnita figura como exponente.

Ejemplos:

1) Resuelve la ecuación: $\mathbf{3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+2} = 93}$

Escribimos todo en función de la potencia 3^x :

$$\frac{3^x}{3} + 3^x + 9 \cdot 3^x = 93 \Rightarrow 3^x\left(\frac{1}{3} + 1 + 9\right) = 93 \Rightarrow 3^x\left(\frac{31}{3}\right) = 93 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Si quieres puedes resolverla mediante un cambio de variable $3^x = t$

2) Fíjate en el siguiente ejemplo: $\mathbf{4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0}$

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow \quad 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

hacemos el cambio $2^x = t \Rightarrow t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0$ ecuación de 2º grado

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \\ 1 \Rightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

3) $\mathbf{3^{2x+1} = 11}$ ¿Cómo lo resolverías? ¡Claro! Utilizando logaritmos.

$$2x + 1 = \log_3 11 \;\Rightarrow\; 2x = \log_3 11 - 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\log_3 11 - 1}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\frac{\log 11}{\log 3} - 1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1'041}{0'477} - 1}{2} = \frac{2'182 - 1}{2} = \frac{1'182}{2} = 0'591$$

Actividad

5. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $5^{2x} - 5^x - 12 = 0$

b) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

d) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

e) $5^{3x-2} = 2$

f) $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$

g) $9^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-1} = 3$

7. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Definición: Son aquellas cuya incógnita aparece sometida a la operación logaritmo:

Ejemplo:

Resuelve la ecuación: $\mathbf{2\log x - \log 45 = \log x - \log 3}$

$$2\log x - \log 45 = \log x - \log 3 \;\Rightarrow\; \log x^2 - \log 45 = \log x - \log 3$$

$$\Rightarrow \log\frac{x^2}{45} = \log\frac{x}{3} \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{45} = \frac{x}{3} \Rightarrow x^2 = 15x \Rightarrow x^2 - 15x = 0 \Rightarrow x(x-15) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

Comprueba las soluciones y recuerda que no existen logaritmos de números negativos ni de cero.

Actividad

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = 4\log 2$

b) $2\log x = \log(-6+5x)$

c) $\log x^3 - \log 40 = \log \dfrac{x}{10}$

d) $5\log\dfrac{x}{2} + 2\log\dfrac{x}{3} = 3\log x - \log\dfrac{32}{9}$

e) $\dfrac{\log 3 + \log(11 - x^3)}{\log(5-x)} = 2$

f) $\log(x-1) + \log(9x+1) = 3$

g) $2\log_3(x+4) - \log_3(5x+2) = 1$

h) $\log_5(7x+4) - \log_5(x-2) = 3 - \log_5(x+2)$

8. ECUACIONES LINEALES

Definición: Se llama ecuación lineal a toda igualdad de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $\mathbf{a_i}$ son los **coeficientes,** $\mathbf{x_i}$ las **incógnitas** y **b** el **término independiente**.

Observa que puede haber un número cualquiera de incógnitas, todas ellas con exponente 1.

Ejemplo: $2x - y + z - 3t = 7$

Según sus soluciones, una ecuación lineal puede ser:

a) Compatible determinada: tiene solución única.
$2 + x = 3$; $x = 3 - 2$; $x = 1$

b) Compatible indeterminada: tiene infinitas soluciones.
$x + y = 0$; $x = -y$

c) Incompatible: no tiene solución.

$x + 5 = x - 1$; $0 = -6$ imposible.

9. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición: Un sistema formado por m ecuaciones y n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

siendo a_{ij} los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i los términos independientes.

Si todos los términos independientes son iguales a cero, se llama **sistema homogéneo.**

Los sistemas pueden ser:

- ***Compatibles***:
  - + Determinado: solución única
  - + Indeterminado: infinitas soluciones
- ***Incompatibles***: no tienen solución.

10. SISTEMAS LINEALES DE DOS INCÓGNITAS

Definición: Son de la forma: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Métodos de resolución:

a) Método de sustitución:

Despejamos el valor de una de las incógnitas en una de las ecuaciones y la sustituimos en la otra

Ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{7x - 3y = 23} \\ \mathbf{4x + y = 5} \end{cases} \Rightarrow \quad y = 5 - 4x \Rightarrow 7x - 3(5 - 4x) = 23 \Rightarrow 7x - 15 + 12x = 23 \Rightarrow$$

$$19x = 38 \Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 5 - 8 = -3$$

b) Método de igualación:

Despejamos una de las incógnitas en las dos ecuaciones e igualamos los valores obtenidos

Ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{7x - 3y = 23} \\ \mathbf{4x + y = 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x - 23}{3} \\ y = 5 - 4x \end{cases} \Rightarrow \frac{7x - 23}{3} = 5 - 4x \Rightarrow 7x - 23 = 15 - 12x \Rightarrow$$

$$19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3$$

c) Método de reducción:

Consiste en conseguir un sistema equivalente eliminando alguna incógnita

Ejemplo :

$$\begin{cases} \mathbf{7x - 3y = 23} \\ \mathbf{4x + y = 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ 12x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$19x = 38 \quad \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3$$

d) Método gráfico:

Gráficamente, cada una de las ecuaciones representa una recta. Por ser la solución un punto que satisface ambas ecuaciones, tiene que ser un punto en común, es decir, su punto de corte:

- Si el sistema es compatible determinado: dos rectas secantes

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

- Si el sistema es compatible indeterminado: dos rectas coincidentes

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

- Si el sistema es incompatible: dos rectas paralelas.

Escribe una ecuación que forme con la dada un sistema incompatible.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \end{cases}$$

**¿Qué observas al resolver los tres sistemas?*

Actividades

7. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que éstas suman 11 y que si invertimos el orden de las cifras el número obtenido excede en 45 al número dado.

8. En un parking hay 37 vehículos entre coches, motos y camiones de 6 ruedas. El número de motos excede en 3 al de coches y camiones juntos. Halla el número de vehículos de cada clase si en total suman 118 ruedas.

9. En un centro hay dos equipos de fútbol A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B en ambos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A queda en éste un número que es el cuadrado de los de aquél. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?

10. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en metros tres números pares consecutivos. ¿Cuánto mide cada lado?

11. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS. MÉTODO DE GAUSS

Consiste en aplicar reiteradamente el método de reducción hasta conseguir un sistema triangular en el que la primera ecuación tenga 3 incógnitas, la segunda 2 y la tercera 1.

Amplía esta información.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{2x - y - 3z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 2z = -5} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (-2) \\ 2x - y - 3z = 0 & \\ -x + 2y - 2z = -5 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad -3y - 5z = -2 \\ \quad 3y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad -3y - 5z = -2 \\ \quad\quad -6z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Recuerda que debes comprobar la solución en las tres ecuaciones.

Actividad

11. Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 3z = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x + 3y - 9z = -18 \\ x - 2z = -5 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$

12. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Ejemplos:

a) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 4} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = 40} \end{cases} \Rightarrow x = 4 - y \Rightarrow (4 - y)^2 + y^2 = 40 \Rightarrow 16 - 8y + y^2 + y^2 = 40$

$2y^2 - 8y - 24 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 12 = 0$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \Rightarrow x = -2 \\ y = -2 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \mathbf{2^x \cdot 2^y = 1} \\ \mathbf{3^{2x} \cdot 3^y = 9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+y} = 2^0 \\ 3^{2x+y} = 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2$

c) $\begin{cases} \mathbf{x - y = 105} \\ \mathbf{\sqrt{x} + y = 27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 105 + y \\ \sqrt{105 + y} = 27 - y \end{cases} \Rightarrow 105 + y = 729 - 54y + y^2 \Rightarrow$

$$y^2 - 55y + 624 = 0 \Rightarrow y = \frac{55 \pm \sqrt{3025 - 2496}}{2} = \frac{55 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 39 \Rightarrow x = 144 \\ y = 16 \Rightarrow x = 121 \end{cases}$$

Actividad

12. Resuelve los sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 256 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 14 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x = \log \dfrac{y}{2} + 1 \\ \log x - \log y = -5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

13. INECUACIONES

Definición: Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas en la que intervienen incógnitas. Pueden aparecer los signos $<$, $>$, $\geq$, $\leq$.

Dos inecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Se cumple que:

a) Si a los dos miembros de la inecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene una inecuación equivalente.
b) Si se multiplican o dividen ambos miembros por un número positivo, se obtiene una ecuación equivalente.

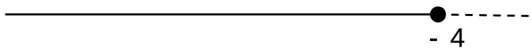
c) Si se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo, resulta otra inecuación con el signo de desigualdad contrario, pero equivalente a la dada.

14. Inecuaciones con una incógnita

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} - 3x \geq 6 - x \Rightarrow \frac{x}{2} - 3x + x \geq 6 \Rightarrow \frac{x + 2x - 6x}{2} \geq 6 \Rightarrow -3x \geq 12 \Rightarrow x \leq -4$$

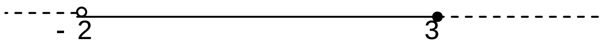
Las soluciones son: $x \in (-\infty, -4]$



15. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 8 \leq x + 14 \\ 2x > \dfrac{3x}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 6 \\ 4x > 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2, 3]$$

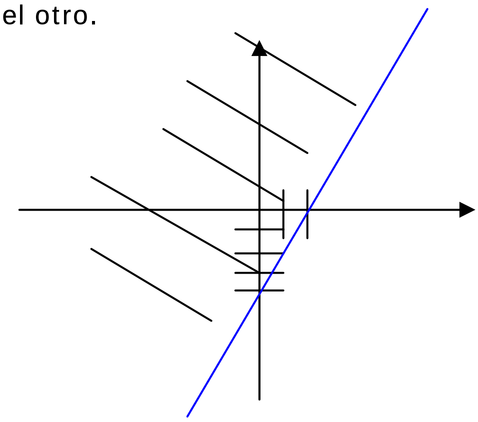


16. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Ejemplo:

$$\mathbf{2x - y \leq 4}$$

Dibujamos la recta 2x – y = 4. Los puntos de corte son (0, - 4) y (2, 0). En los puntos de esta recta, se cumple que 2x-y es igual a 4. En los demás puntos, 2x-y será distinto de 4, es decir, mayor o menor. Cada semiplano corresponde a uno de los dos signos. La solución corresponde a uno de los semiplanos. Se elige un punto cualquiera de uno de ellos (0, 0) y se sustituye en la inecuación. Si la satisface, su semiplano será la solución, si no, lo será el otro.



Actividad

13. Resuelve los sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

a) $$\begin{cases} 3x + 2 \leq 22 - 5y \\ x \leq 4 - 2y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 3x + 5y \leq 20 \\ x + y \geq 0 \\ 5y - 10 \leq 2x \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - \dfrac{3 - 2x}{4} < \dfrac{3y - 1}{3} \\ \dfrac{3x + 3}{4} > \dfrac{y + 1}{2} + 3 \end{cases}$$

EJERCICIOS

1. Resuelve las ecuaciones de 2º grado:

a) $5x^2 + 6x - 8 = 0$
b) $2x(x+3) = 3(x-1)$
c) (2x –3)2 = 8x
d) 2x(x + 3) = 3 (x – 1)

2. Resuelve las ecuaciones radicales:

a) $1 + \sqrt{x} = \sqrt{15}$
b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 2$
c) $x - \sqrt{x} = 2$
d) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$
e) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$
f) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$
g) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$
h) $\sqrt{1-x} = \sqrt{2}$
i) $-3 + \sqrt{x} = 9 - x$
j) $\sqrt{9-x} - 11 = x$
k) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+2} = 1$
l) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+4} = 1$
m) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 1$

3. Resuelve las ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
b) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$
c) $4x^4 - 9x^2 - 9 = 0$
d) $6x^4 - 27x^2 + 12 = 0$
e) $5x^4 + 6x^2 - 8 = 0$
f) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

4. Descomponer en factores:

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
b) $x^3 - 7x - 6 = 0$
c) $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$
d) $x^3 - 3x + 2 = 0$
e) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

5. Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $6 \cdot 7^{3x-4} = 294$
b) $5^x = 125$
c) $64 = 2^{3x+4}$
d) $3^{2x+1} = 11$

e) $5^{3x+8} = 7^{4x}$
f) $9 \cdot 3^{x-1} = 243$
g) $5^{x^2-x-20} = 1$
h) $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x+1}} = 3^{x-5}$
i) $8 \cdot 2^{1-x} = 64$
j) $3^{x^2-3x} = 81$
k) $2^{x-5} = 2$
l) $2^{3x+4} = 64$
m) $3^{x} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$

6. Resuelve las ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x + \log 30 = 4$
b) $\log_2(x+3) = 4$
c) $2\log x - \log(x-16) = 2$
d) $\dfrac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5-x)} = 2$
e) $\log x - \log 5 = 6$
f) $\log(x+5) = \log(x^2 - 1)$

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 2^{2y} = 32 \\ \dfrac{2^{3x}}{2^{5y}} = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^{y} = 339 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^{x-2y} = 3 \\ 3^{2x-3y} = 27 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 5 \\ 2^{x} - 3 \cdot 2^{y} = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

8. Antonio mezcla café de clase A a 950 pts el kilo con café de clase B a 1400 pts el kilo y obtiene 9 kilos de mezcla. El kilo de café mezclado cuesta 1150 pts. ¿Cuántos kilos de café de cada clase ha mezclado?

9. En la bolsa A y en la bolsa B hay un total de 80 bolas. Si pasamos 10 bolas da la bolsa B a la bolsa A, el número de bolas de la bolsa A es 3 veces el número de bolas de la bolsa B. ¿Cuántas bolas hay en cada bolsa?

10. En un avión van 192 personas entre hombres y mujeres. El número de mujeres es 3/5 del número de hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres van en el avión?

11. La suma de dos números es igual a 54. La quinta parte del mayor es igual a la cuarta parte del menor. ¿Cuáles son esos números?

12. Un padre tiene el triple de la edad que su hija. Si el padre tuviera 30 años menos y la hija tuviera 8 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuál es la edad de la hija y cuál la del padre?

13. La superficie de un triángulo equilátero es de $50m^2$. Calcula el lado.

14. En una clase hay 45 alumnos entre chicos y chicas. Practican natación el 32% de los chicos y el 60% de las chicas. Si el número total de alumnos que practican natación es igual a 20, ¿cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

15. La base de un rectángulo es 4/3 de su altura y su perímetro es igual a 28cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

16. En un camping hay 120 vehículos entre coches y motos. Si se van 40 coches, el número de coches y el número de motos es igual. ¿Cuántos coches y motos hay en el camping?

17. Un inversor, que tiene 28.000€, coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200€ más que la segunda, ¿cuánto coloco en cada banco?

18. Un país compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores distintos que lo venden a 28, 27 y 31 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 millones de dólares. Si del primer suministrador recibe el 30% del total del petróleo comprado, ¿qué cantidad ha comprado a cada suministrador?

19. Un granjero espera obtener 36€ por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0'45€ el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

20. Pepe y Olga hacen un trabajo en tres horas. Si Pepe lo hiciera solo, tardaría 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría Olga en hacerlo sola?

CUESTIONES

1. ¿Qué condición ha de cumplir una ecuación de 2º grado para que una de sus raíces sea 0? Pon un ejemplo.

2. ¿Tiene soluciones reales una ecuación de 2º grado cuyos coeficientes sean todos iguales? Pon un ejemplo.

3. Un alumno dice que toda ecuación de 2º grado cuyo término independiente es negativo tiene raíces reales. ¿es cierto?

4. Si dos números son iguales, sus cuadrados también lo son, ¿es cierto el recíproco?

5. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede tener exactamente dos soluciones? Pon un ejemplo.

6. Determina para qué valores de b la ecuación $x^2 - bx + 9 = 0$ tiene:

a) Una solución.
b) Dos soluciones.

7. ¿Qué valor ha de tomar k para que la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$ tenga una solución?

8. Escribe una ecuación que tenga por soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.

9. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $x^2 + k = 0$?

UNIDAD DIDÁCTICA 3

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

1. Identificar y calcular las razones trigonométricas de ángulos a partir de las relaciones existentes entre ellos y de las razones conocidas de otros ángulos.

2. Utilizar correctamente las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos, así como las del ángulo doble y el ángulo mitad.

3. Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas.

4.- Plantear y resolver problemas a partir de la trigonometría.

5.- Determinar todos los elementos de un triángulo conocidos algunos de ellos.

6.- Utilizar correctamente el teorema de los senos y el teorema del coseno.

7.- Resolver problemas relacionados con triángulos.

CONCEPTOS

1. Definición de las R.T., signos y relaciones entre ellas.

2. Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.

3. Reducción de las R.T. de cualquier ángulo a las de ángulos entre 0º y 45º.

4. Razones trigonométricas de la suma y resta de ángulos.

5. Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

6. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

7. Teorema del coseno: enunciado y demostración.

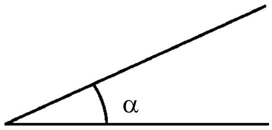
8. Teorema de los senos: enunciado y demostración.

9. Resolución de triángulos. Aplicaciones a problemas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

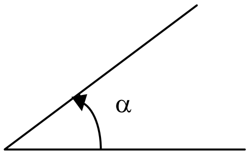
1.- INTRODUCCIÓN

Definición: Se llama **ángulo** a la parte del plano limitada por 2 semirrectas del mismo origen.



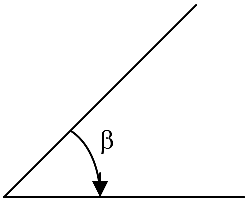
Puede ser medido en grados sexagesimales o en radianes.

Se dice que un ángulo tiene sentido positivo si su recorrido es contrario al de las agujas del reloj.



$\alpha > 0$ positivo

Se dice que un ángulo tiene sentido negativo si su recorrido coincide con el de las agujas del reloj.

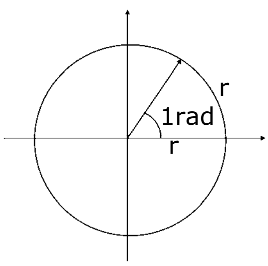


$\beta < 0$ negativo

Los ángulos pueden medirse en los dos sentidos de forma que: 300º = -60º 90º = - 270º.

Una circunferencia tiene 360º ó 2π radianes dado que:

Definición: Se llama **radián** al ángulo central de una circunferencia que abarca un arco igual al radio.



Por ser $2\pi r$ el perímetro de la circunferencia y ocupar un tramo de tamaño r cada radián, habrá en total 2π radianes.

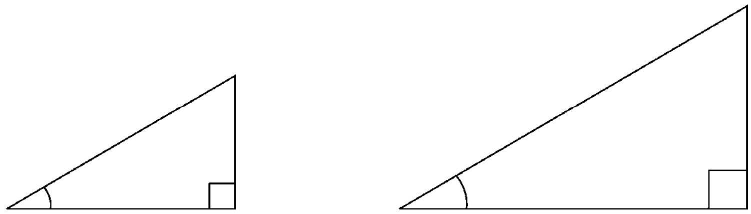
El paso de una a otra medida se realiza a través de una sencilla regla de tres: **2π rad. → 360º**, o mejor, **π rad. → 180º**

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

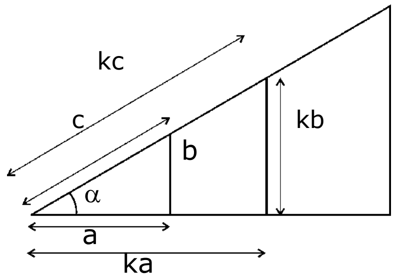
Actividad
1.- Expresa en radianes los siguientes ángulos:

30º 72º 90º 200º

Observa estos triángulos:



Es evidente que los ángulos son iguales. ¿Cómo son sus lados? ¿Existe alguna relación entre ellos? Obsérvala en este dibujo.



¿Cuántas proporciones posibles pueden establecerse entre los 3 lados de un triángulo? Cada una de ellas tiene un nombre.

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SENO DE α , se escribe $\textbf{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

COSENO DE α , $\textbf{cos}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$

TANGENTE DE α , $\textbf{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

*** Demuestra esta última igualdad***

Y sus inversas:

COSECANTE DE α, $\quad$ $\mathbf{cosec}\,\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$

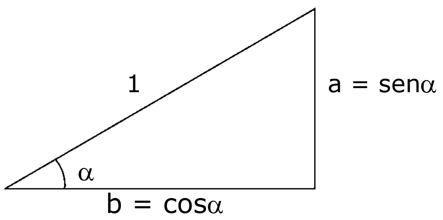
SECANTE DE α , $\quad$ $\mathbf{sec}\,\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

COTANGENTE DE α, $\quad$ $\mathbf{cotg}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

Estas proporciones permanecen invariables en cualquier triángulo rectángulo en el que el ángulo α esté incluido.

¿Por qué no elegir el más "cómodo"?

Efectivamente, si elegimos el de hipotenusa igual a 1, las razones trigonométricas quedan más "visibles" ya que:

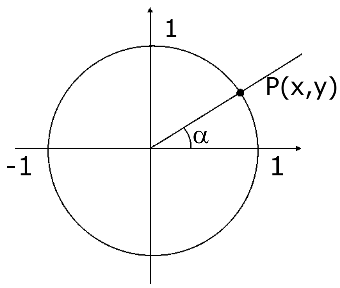


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{1} = a$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{1} = b$$

A partir de ahora, incluiremos los ángulos en una circunferencia de radio 1 llamada circunferencia goniométrica o unidad.

Consideramos los ejes de coordenadas y una circunferencia de centro O y radio 1 (circunferencia goniométrica). Trazamos una semirrecta que forme un ángulo α con el semieje positivo de abscisas. Esta semirrecta corta a la circunferencia en un punto P de coordenadas (x,y)



Aplicando la definición, las razones trigonométricas quedarían expresadas:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}}$$

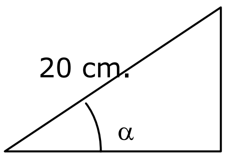
$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Tanto el <u>seno</u> como el <u>coseno</u> tomarán valores comprendidos entre -1 y 1 ambos incluidos (el cateto es siempre menor que la hipotenusa). La <u>cosecante</u> y la <u>secante</u>, por ser inversas, tomarán valores menores o iguales que -1 y mayores o iguales que 1.
La <u>tangente</u> y <u>cotangente</u> pueden tomar cualquier valor (el seno puede ser menor, igual o mayor que el coseno).

Actividades

2.- Calcula los catetos del triángulo sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = 0'6$

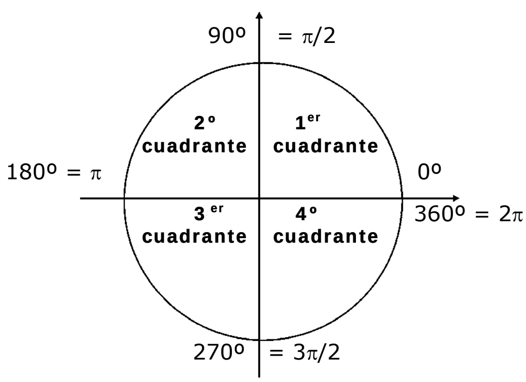


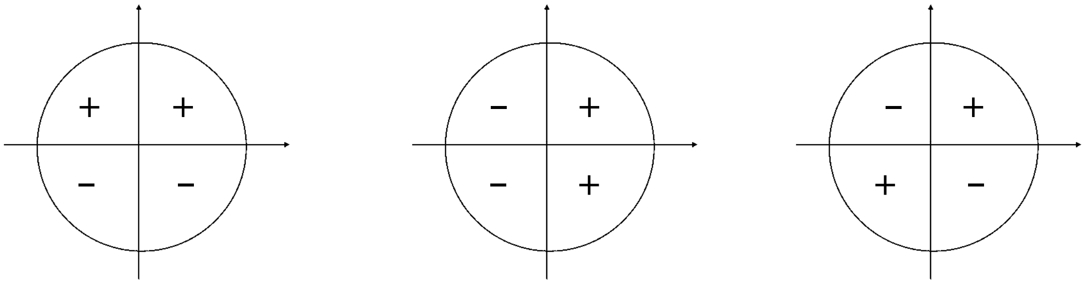
¿Cuánto valen las restantes razones trigonométricas del ángulo α?

3.- Jorge juega con una cometa en la playa. El hilo de la cometa mide 5 m. Si Jorge mide de alto 1'60 m. ¿a qué altura está la cometa cuando su hilo forma con la horizontal un ángulo de 30º?

3.- <u>SIGNOS DE LAS R.T.</u>

Vienen determinados por las coordenadas (x,y) del punto P, es decir, por el cuadrante donde se encuentre el ángulo α



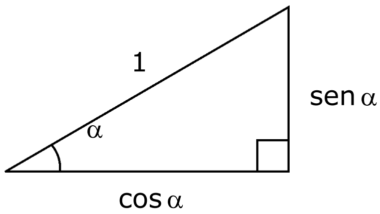


seno cosecante — coseno secante — tangente cotangente

Lógicamente, cosecα, secα y cotgα mantienen el mismo signo que su correspondiente inversa.

4.- <u>RELACIONES ENTRE LAS R.T.</u>

Sabemos que aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos:



$$\boxed{\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}}$$

<u>Fórmula fundamental</u>

Si dividimos entre $\cos^2\alpha$: $\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ de donde se

deduce que $\boxed{\mathbf{tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}}$

Por otra parte, si dividimos entre $sen^2\alpha$: $\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}$

Obtenemos $\boxed{\mathbf{1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha}}$

Estas fórmulas permiten conocer todas las R. T. de un ángulo partiendo sólo de una de ellas. Siempre habrá que elegir un signo teniendo en cuenta el cuadrante donde se encuentre α. Si el cuadrante no es conocido habrá dos posibilidades y se mantendrán los dos signos.

(*) En cuanto a notación, es lo mismo $sen^3\alpha$ que $(sen\alpha)^3$ y significa que es el seno del ángulo el que está elevado al cubo.
Sin embargo, $sen\,\alpha^3$ indica que es el ángulo α el que está elevado al cubo y no su seno.

Ejemplo:

Si $tg\alpha = \frac{4}{5}$ y el ángulo está en el tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Al estar en el tercer cuadrante:

- Razones positivas: tangente y cotangente
- Razones negativas: seno, cosecante, coseno y secante
- Como conocemos el valor de la tangente, hallaremos primero su inversa:

$$\cot g\alpha = \frac{5}{4}$$

Utilizamos la relación fundamental para hallar el coseno:

$$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \sec^2\alpha \Rightarrow 1 + \frac{16}{25} = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = \frac{41}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{\frac{41}{25}} = \pm\frac{\sqrt{41}}{5}$$ como el ángulo está en el tercer cuadrante, sabemos que debe ser negativa. Se tiene entonces:

$$\sec\alpha = -\frac{\sqrt{41}}{5}$$

Calculamos la razón inversa para conocer el coseno:

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}} = -\frac{5\sqrt{41}}{41}$$

Calculamos el seno:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow sen\alpha = tg\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow sen\alpha = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{-5\sqrt{41}}{41}\right) = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$$

Calculamos la inversa del seno:

$$cosec\alpha = -\frac{\sqrt{41}}{4}$$

Actividad

4.- Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo a en cada uno de los siguientes casos:

a) sena = $-\frac{4}{5}$ y a < 270º

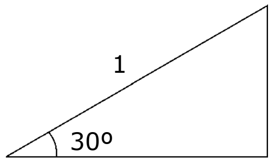
b) cosa = $\frac{2}{3}$ y tga < 0

c) tga = -3

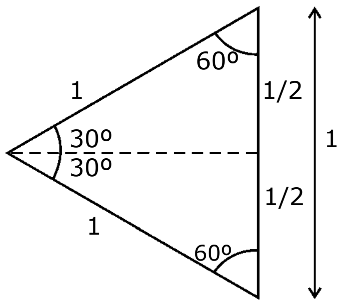
5.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

5.1 α = 30º

Duplicando el triángulo



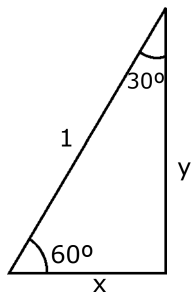
obtenemos un nuevo triángulo equilátero por tener los tres ángulos iguales.



Por tanto sen30º = $\frac{1}{2}$, y aplicando la fórmula fundamental: $\cos^2 30º + \frac{1}{4} = 1$

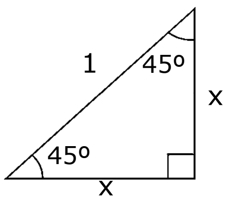
$\Rightarrow \quad \cos^2 30º = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos 30º = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2 α = 60º



Como $\text{sen}30º = \frac{x}{1} = \cos 60º = \frac{1}{2}$ / $\cos 30º = y = \text{sen}60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.3 α = 45º



Por ser un triángulo isósceles se cumple: $x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ luego: $\text{sen}45º = \cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$

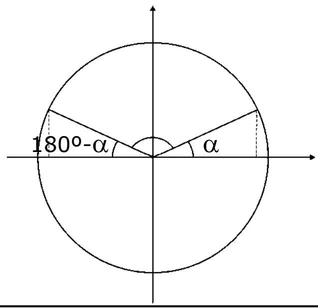
Podemos completar entonces la siguiente tabla:

	sen α	cos α	tg α
0º	0	1	0
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90º	1	0	∞
180º	0	-1	0
270º	-1	0	∞

6.- REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Observaremos ahora que se pueden calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo conociendo únicamente las razones de los ángulos del primer cuadrante. Es más, incluso basta con conocer las razones de los ángulos comprendidos entre 0º y 45º.

6.1 ÁNGULOS DEL 2º CUADRANTE (ángulos suplementarios: suman 180º)



Observa en el dibujo que P y P' son simétricos, es decir:

$$\text{sen}(180º - \alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$$

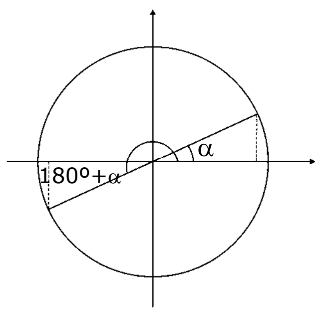
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha$$

Ejemplo:	sen160º = sen20º	cos100º = - cos80º

(Haz un dibujo de la circunferencia para comprobar los ejemplos)

6.2 ÁNGULOS DEL 3er CUADRANTE (ángulos que difieren en π : α y $\pi + \alpha$)



Se compara cada ángulo del tercer cuadrante con el ángulo del primero correspondiente a lo que excede de 180º (π) de forma que:

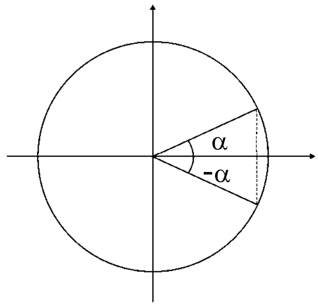
α y $\pi + \alpha$ tienen seno y coseno opuestos y la misma tangente.

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\alpha$$

Ejemplo:	sen230º = - sen 50º	cos190º = - cos10º

(Compruébalo de nuevo)

6.3 **ÁNGULOS DEL 4ª CUADRANTE** (ángulos opuestos α y $-\alpha$)

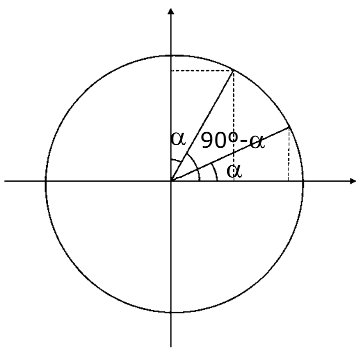


Se compara cada ángulo del 4º cuadrante con su opuesto de forma que:

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$

Ejemplo:	$\text{tg}300º = \text{tg}(-60º) = -\text{tg}60º = -\sqrt{3}$
	$\cos 340º = \cos(-20º) = \cos 20º$

6.4 **REDUCCIÓN A ÁNGULOS COMPRENDIDOS ENTRE 0º y 45º**



Se observa que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = a = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = b = \text{sen}\,\alpha$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha$

Los ángulos que suman 90º se llaman **complementarios.**

(Es por eso que $\text{sen}30º = \cos 60º = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30º = \text{sen}60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y el seno y coseno de 45º son iguales)

Por tanto, para hallar las R. T. de cualquier ángulo a través de las de uno del primer cuadrante, son necesarios dos requisitos:

1.- Comprobar cuál es el ángulo que le corresponde y
2.- Asignar el signo del cuadrante correspondiente.

Ejemplo:	**cos210º**	(excede 30º de 180º, luego su coseno será el mismo pero con signo - por ser del tercer cuadrante)
		$\cos 210º = -\cos 30º$

Queda visto, por tanto, que todo ángulo puede ser reducido a uno de la primera mitad del primer cuadrante.

6.5 ÁNGULOS MAYORES QUE 360º

Siempre pueden ser reducidos a uno comprendido entre 0º y 360º. Para ello dividimos el ángulo entre 360º para conocer el número de vueltas completas (cociente) y nos quedamos con el resto, que será el ángulo equivalente cuyas R.T. coincidirán con las del ángulo dado.

- No debemos olvidar que no se pueden simplificar ceros en estas divisiones por tratarse de un sistema sexagesimal.

Ejemplo: el ángulo 1180º será equivalente al de 100º ya que: 1180º : 360º tiene cociente 3 y resto 100º, lo que significa que ocupa 3 vueltas completas de la circunferencia y ocupa 100º de la cuarta.

Actividades

5.- Halla las razones trigonométricas de los ángulos 55º, 125º, 145º, 215º, 235º, 305º y 325º, a partir de las R.T. de 35º.

Datos sen35º= 0'57 cos35º = 0'82 tg35º = 0'7

6.- Expresa como un ángulo del primer cuadrante :

a) sen150º	**d)** cos135º	**g)** tg210º
b) cos225º	**e)** sen315º	**h)** tg120º
c) tg340º	**f)** cos200º	**i)** sen290º

7.- Si $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$ y $0 < \alpha < 90º$ halla:

a) $\text{sen}\,\alpha$	**c)** $\cos(180º + \alpha)$	**e)** $\text{sen}\,(180º - \alpha)$
b) $\text{tg}(90º - \alpha)$	**d)** $\cos\alpha$	**f)** $\text{tg}(360º - \alpha)$

8.- Calcula los ángulos a) cuyo coseno es igual al cos117º
b) cuya tangente es igual a tg41º

9.- Halla, sin usar calculadora:

sen1215º tg(-60º) $\sec\frac{23\pi}{6}$ sec4440º cos(-225º) sen18750º

7.- RAZONES DE LA SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Dados dos ángulos cualesquiera a y b pretendemos conocer, a partir de sus R. T., las de los ángulos a+b y a-b.

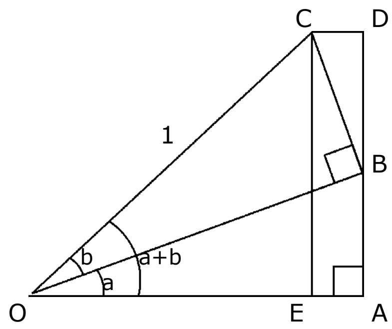
7.1 SENO DE LA SUMA

Vamos a demostrar que sen(a+b) **no** es lo mismo que sena + senb, es decir, el seno de la suma no es la suma de los senos. Si lo fuera, entonces sen90º = sen(45º+45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, lo cual no sólo es falso (sen90º = 1) sino que además es imposible por ser mayor que 1.

Lo que sí es rigurosamente cierto y demostrable es:

$$\boxed{\textbf{sen(a+b) = sena·cosb + cosa·senb}}$$

Demostración: Observa en el dibujo los ángulos a, b y a+b.



En el triángulo OEC se cumple: sen(a+b) = $\overline{EC} = \overline{AB} + \overline{BD}$

(Si demostramos que $\overline{AB}$ = sena·cosb y que $\overline{BD}$ = cosa·senb, habremos demostrado la fórmula).

Observa que en el triángulo OBC se cumple: senb = $\overline{BC}$ y cosb = $\overline{OB}$.

Por otra parte, en el triángulo OAB podemos observar que sena = $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ y, utilizando la igualdad anterior, podemos cambiar $\overline{OB}$ por cosb. Quedaría entonces: sena = $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{\cos b}$ de donde, multiplicando en cruz, obtenemos $\overline{AB}$ = sena·cosb

Fíjate ahora en el triángulo BCD y comprueba que el ángulo correspondiente al vértice B es, también, el ángulo a.

Podemos deducir que cosa = $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\text{senb}}$

Multiplicando de nuevo en cruz obtenemos: $\overline{BD}$ = cosa·senb

Por tanto, sen(a+b) = $\overline{AB} + \overline{BD}$ = sena·cosb + cosa·senb **c.q.d.**

Ejemplo: sen75º = sen(30º+45º) = sen30º·cos45º + cos30º·sen45º =

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

7.2 SENO DE LA RESTA

Se demuestra que **sen(a - b) = sena·cosb – cosa·senb**

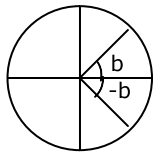
Para comprobarlo, tendremos en cuenta que la resta es la suma con el opuesto y utilizaremos la fórmula anterior ya demostrada.

sen(a – b) = sen(a + (-b)) = sena·cos(-b) + cosa·sen(-b)

Sabemos que, por reducción al primer cuadrante, sen(-b) = -senb y cos(-b) = cosb.

Por tanto,

sen(a – b) = sena·cosb + cosa·(-senb) = **sena·cosb – cosa·senb**



c.q.d.

Ejemplo: sen 60º = sen (90º - 30º) = sen90º·cos30º - cos90º·sen30º =

$$= 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7.3 COSENO DE LA SUMA

Se cumple que: **cos(a+b) = cosa·cosb – sena·senb**

Demostración:

Trataremos de utilizar las fórmulas anteriores para realizar esta demostración. Tendremos en cuenta que el coseno de un ángulo coincide con el seno de su complementario.

$$\cos(a+b) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \operatorname{sen}\left((\frac{\pi}{2}-a)-b\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a)\right)\cdot\cos b - \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\operatorname{sen} b = \cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b$$ **c.q.d.**

> *Ejemplo:* Halla cos120º como suma de 90º+30º y comprueba que la solución es correcta utilizando reducción al primer cuadrante.

7.4 COSENO DE LA RESTA

Se cumple que: $\boxed{\mathbf{\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}\,b}}$

Demostración:

Se basa en la misma estrategia anterior de entender la resta como suma con el opuesto y recordar que, por reducción al primer cuadrante, sen(-b) = -senb y cos(-b) = cosb.

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a\cdot\cos(-b) - \mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}(-b) =$$
$$= \cos a\cdot\cos b - \mathrm{sen}\,a(-\mathrm{sen}\,b) = \cos a\cdot\cos b + \mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}\,b$$

c.q.d.

7.5 TANGENTE DE LA SUMA

Se cumple que: $\boxed{\mathbf{tg(a+b) = \dfrac{tga + tgb}{1 - tga\cdot tgb}}}$

Demostración:

Sabemos que: $tg(a+b) = \dfrac{\mathrm{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\mathrm{sen}\,a\cdot\cos b + \cos a\cdot\mathrm{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b - \mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}\,b}$ y dividiendo

numerador y denominador entre cosa·cosb obtenemos:

$$tg(a+b) = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} + \dfrac{\cos a\cdot\mathrm{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} - \dfrac{\mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,a}{\cos a} + \dfrac{\mathrm{sen}\,b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\mathrm{sen}\,a}{\cos a}\cdot\dfrac{\mathrm{sen}\,b}{\cos b}} = \frac{tga + tgb}{1 - tga\cdot tgb}$$

c.q.d.

> *Ejemplo:* $tg60º = tg(30º+30º) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

7.6 TANGENTE DE LA RESTA

Se cumple que: $\boxed{\mathbf{tg(a-b) = \dfrac{tga - tgb}{1 + tga\cdot tgb}}}$

Demostración:

Prueba a intentarla tú, siguiendo los mismos pasos que en la demostración anterior.

Actividades

10.- Si sen 12º = 0'2 y sen 37º = 0'6, halla las restantes razones trigonométricas de 49º y 25º

11.- Si cos 40º = 0'766 calcula:

a) sen5º b) cos50º c) tg 10º

12. Sabiendo que sen6º = 0'1045 y que cos37º = 0'7986, calcula:

a) cos31º b) cos84º c) sen53º d) tg43º e) sen174º

13. Sabiendo que tga = $\frac{1}{3}$ y que tgb = $-\frac{1}{7}$, halla tg(a+b) y cotg(a-b)

8.- RAZONES DEL ÁNGULO DOBLE Y MITAD

Pretendemos calcular las R.T. de los ángulos 2a y $\frac{a}{2}$ a partir de las R.T. del ángulo a.

Sen2a = sen (a+a)=
Cos2a =
tg2a =

Intenta completar las fórmulas y consulta tu resultado.

Actividad

14.- Si sen $\alpha = \frac{3}{7}$ y α está en el 2º cuadrante, calcula sen 2α y cos 2α.

Por otra parte, sabemos que : $\cos^2 A + \text{sen}^2 A = 1$

$$\cos^2 A - \text{sen}^2 A = \cos 2A$$

1) Sumando ambas ecuaciones : $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$

de donde se deduce que $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2} \Rightarrow \cos A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}$

Aunque sabemos que el ángulo A es la mitad de 2A, el cambio de variable 2A=a nos ayudará a "verlo" mejor, ya que, en ese caso, $A = \frac{a}{2}$

La fórmula queda entonces de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathbf{\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}}$$

2) Si restamos ahora las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$2\,\text{sen}^2 A = 1 - \cos 2A \Rightarrow \text{sen}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \Rightarrow \text{sen}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}$

y, realizando el mismo cambio de variable anterior , se deduce:

$$\boxed{\mathbf{\text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}}$$

De ambas fórmulas concluimos:

$$\mathbf{tg\frac{a}{2}} = \frac{\text{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}} = \pm\sqrt{\mathbf{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}}$$

<u>*Ejemplo:*</u> $\text{sen}45º = \text{sen}\frac{90º}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 90º}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Elegimos signo + porque 45º está en el primer cuadrante. En cada ángulo, habrá que elegir el signo que le corresponda según el cuadrante en el que se encuentre.

** Recuerda que si conoces que el ángulo **a** está, por ejemplo, en el tercer cuadrante (entre 180º y 270º), entonces $\frac{a}{2}$ estará entre 90º y 135º, y tendrás que elegir para $\frac{a}{2}$ los signos del segundo cuadrante.

Actividades

15.- Sabiendo que cos 78º = 0'2 , halla las R.T. de 39º

16.- Sabiendo que $\text{sen}x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula

a) sen 2x **c)** $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **e)** $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\text{tg}\ \frac{x}{2}$ **d)** $\cos\frac{x}{2}$ **f)** $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

17. Calcula las R.T. de $\frac{\alpha}{2}$ sabiendo que α está en el tercer cuadrante y que $\sec\alpha = -2$.

9.- ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de resolver ecuaciones en las que aparecen razones trigonométricas y en las que las incógnitas a despejar, son ángulos.

Consideramos suficiente dar las soluciones de la primera vuelta, entre 0º y 360º.

Es necesario comprobar todas las soluciones obtenidas, pues pueden aparecer soluciones falsas.

Ejemplo: $\text{sen}2x \cdot \cos x = 6\,\text{sen}^3 x$

$$2\,\text{sen}x\cdot\cos x\cdot\cos x = 6\,\text{sen}^3 x \Rightarrow 2\,\text{sen}x\cdot\cos^2 x = 6\,\text{sen}^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}x\,(1 - \text{sen}^2 x) = 6\,\text{sen}^3 x \Rightarrow 2\,\text{sen}x - 2\,\text{sen}^3 x = 6\,\text{sen}^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}x = 8\,\text{sen}^3 x \Rightarrow \text{sen}x = 4\,\text{sen}^3 x \underset{(**)}{\Rightarrow} \text{sen}x\,(1-4\,\text{sen}^2 x) = 0$$

entonces, o bien senx = 0 de donde obtenemos **x = 0°, 180°**

o bien $1-4\,\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{1}{2}$ luego

x = 30°, 150°, 210°,330°

Observa que hemos obtenido 6 soluciones. Compruébalas.

(**) Si en algún paso simplificas senx o alguna otra razón, estarás perdiendo las soluciones correspondientes a senx = 0, puesto que simplificar es dividir, y no se puede dividir entre 0. Por ello es aconsejable, en vez de simplificar, pasar todo a un miembro y sacar factor común.

Actividad

18.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b) $2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 3$

c) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

d) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$

Ejemplo: Resuelve el sistema $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 2 \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

De la segunda ecuación despejamos: $x = y + \frac{\pi}{3}$ y sustituimos en la primera.

$$\frac{\operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen} y} = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{sen} y\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos y\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\operatorname{sen} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} y\cdot\frac{1}{2} + \cos y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{sen} y + \sqrt{3}\cos y = 4\operatorname{sen} y \Rightarrow \sqrt{3}\cos y = 3\operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 y = 9\operatorname{sen}^2 y \Rightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2 y) = 9\operatorname{sen}^2 y \Rightarrow 3 - 3\operatorname{sen}^2 y = 9\operatorname{sen}^2 y$$

$$\Rightarrow 3 = 12\operatorname{sen}^2 y \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} y = \pm\frac{1}{2}$$

Si $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 30º, 150º$

Si $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 210º, 330º$

Como $x = y + \frac{\pi}{3}$, las soluciones son:

1) x = 90º	2) x = 210º	**3) x = 270º**	4) x = 390º=30º
y = 30º	y = 150º	**y = 210º**	y = 330º

Comprueba que sólo son válidas las soluciones 1) y 3).

Actividad

19.- Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 120º \\ \text{senx} - \text{seny} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \text{sen}^2 y = 1 \end{cases}$

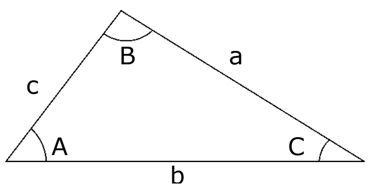
c) $\begin{cases} \dfrac{\text{senx}}{\text{seny}} = 2 \\ x - y = 60º \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2\text{senx} = 1 - \cos y \\ 2\cos x = 1 + \cos y \end{cases}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Trataremos de conocer los 6 elementos de un triángulo a partir de 3 de ellos únicamente. Para ello, introducimos el teorema del coseno y el teorema de los senos.

10. TEOREMA DEL COSENO

En cualquier triángulo se verifica



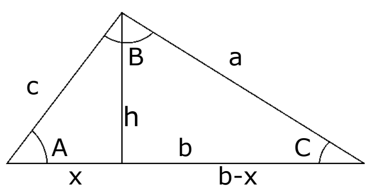
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$

siendo a,b,c los lados y A,B,C los ángulos opuestos respectivos.

Demostración:

Trazamos una altura h del triángulo. Se cumple entonces, por el teorema de Pitágoras que:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$
$$c^2 = h^2 + x^2$$



despejando h^2 obtenemos: $h^2 = a^2 - (b - x)^2$

$h^2 = c^2 - x^2$ luego es cierto que:

$$a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = c^2 - x^2 \Rightarrow a^2 - b^2 + 2bx - \cancel{x^2} = c^2 - \cancel{x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ y observando el dibujo, deducimos que $\cos A = \frac{x}{c}$

o, lo que es lo mismo, $x = c\cdot\cos A$. Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

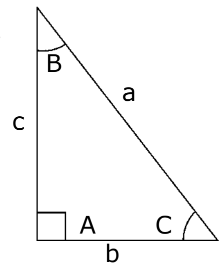
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Las otras ecuaciones se obtienen igualmente trazando las otras dos alturas del triángulo.

¿Qué ocurre en el caso particular de los triángulos rectángulos?

Aplicando el teorema resultaría $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\underbrace{\cos 90º}_{0}$,

es decir, $a^2 = b^2 + c^2$, con lo que estaríamos ante el Teorema de Pitágoras.



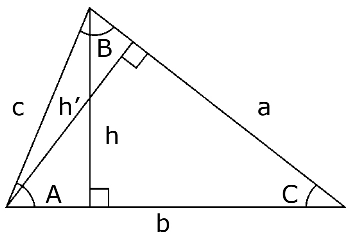
Queda visto entonces que el Teorema del Coseno es una generalización a cualquier triángulo del Teorema de Pitágoras.

11. TEOREMA DE LOS SENOS

En todo triángulo se cumple que los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos, es decir, $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{senA}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{senB}} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{senC}}$

Demostración: Distinguiremos tres casos:

1) TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS (3 ángulos agudos)



Consideramos la altura h del triángulo, que lo divide en dos triángulos rectángulos. En cada uno de ellos se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}A = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c\cdot \text{sen}A \\[2ex] \text{sen}C = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a\cdot \text{sen}C \end{array}\right\} \Rightarrow c\cdot \text{sen}A = a\cdot \text{sen}C \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (1)$$

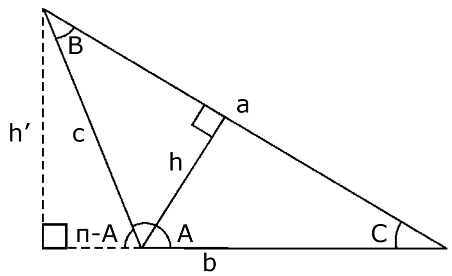
Por otra parte, si consideramos otra altura h' obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}B = \dfrac{h'}{c} \Rightarrow h' = c\cdot \text{sen}B \\ \\ \text{sen}C = \dfrac{h'}{b} \Rightarrow h' = b\cdot \text{sen}C \end{array}\right\} \Rightarrow c\cdot \text{sen}B = b\cdot \text{sen}C \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (2)$$

A partir de las igualdades (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$ **c.q.d.**

2) <u>TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS</u> (un ángulo obtuso)



Consideramos la altura h del triángulo, que lo divide en dos triángulos rectángulos. En cada uno de ellos se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}B = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c\cdot \text{sen}B \\ \\ \text{sen}C = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b\cdot \text{sen}C \end{array}\right\} \Rightarrow c\cdot \text{sen}B = b\cdot \text{sen}C \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (1)$$

Si consideramos ahora la altura h' se verifica:

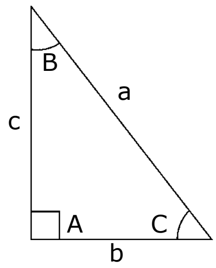
$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}C = \dfrac{h'}{a} \Rightarrow h' = a\cdot \text{sen}C \\ \\ \text{sen}(\pi - A) = \dfrac{h'}{c} \Rightarrow h' = c\cdot \text{sen}A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow c\cdot \text{sen}A = a\cdot \text{sen}C \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{c}{\text{sen}C} \quad (2) \end{array}$$

$\text{sen}(\pi - A) = \text{sen}A$

De nuevo teniendo en cuenta (1) y (2) se cumple:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$ **c.q.d.**

3) TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Según la definición de seno:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}B = \frac{b}{a} &\Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen}B} \\ \operatorname{sen}C = \frac{c}{a} &\Rightarrow a = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \end{aligned}\right] \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

como $A = 90º$ y $\operatorname{sen}90º = 1$ podemos dividir $\frac{a}{\operatorname{sen}A}$ sin que varíe la expresión. Luego también se cumple:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$ **c.q.d.**

10.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Un triángulo queda determinado si se conocen tres de sus seis elementos (salvo en el caso de que los datos conocidos sean los tres ángulos, dado que en realidad serían dos datos, pues el tercer ángulo se deduce de los otros dos).

Podemos distinguir 4 casos:

12.1 CONOCIDOS DOS ÁNGULOS Y UN LADO

Ejemplo: $A = 48º$ $B = 64º$ $c = 10$ cm.

Necesitamos conocer el ángulo C y los lados a y b.

$C \rightarrow$ $C = 180º - (A + B) = 180º - 112º = 68º$

$a \rightarrow$ $\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}48º} = \frac{10}{\operatorname{sen}68º} \Rightarrow a = \frac{10 \cdot \operatorname{sen}48º}{\operatorname{sen}68º} \approx 8'01$ cm.

$b \rightarrow$ $\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \Rightarrow b = \frac{10 \cdot \operatorname{sen}64º}{\operatorname{sen}68º} \approx 9'69$cm.

Puedes observar que hemos utilizado el teorema de los senos.

12.2 CONOCIDOS DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO

Ejemplo: b = 9 cm. c = 7 cm. A = 44º

Necesitamos conocer el lado a y los ángulos B y C.

a $\rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 81 + 49 - 2\cdot 63\cdot \cos 44º = 39'37$

luego $a = +\sqrt{39'37} \approx 6'27$cm (por el teorema del coseno)

B $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \dfrac{6'27}{\text{sen}44º} = \dfrac{9}{\text{sen}B} \Rightarrow \text{sen}B = \dfrac{9\cdot\text{sen}44º}{6'27} = 0'9964$

$\Rightarrow B \approx 85º\ 10'$

(si desconoces cómo hacer esta operación con la calculadora, consúltalo)

C $\rightarrow$ $C = 180º - (A+B) \approx 50º\ 50'$

12.3 CONOCIDOS DOS LADOS Y EL ÁNGULO NO COMPRENDIDO

Ejemplo: a = 12cm. b = 15 cm. A = 48º

Necesitamos conocer el lado c y los ángulos B y C.

B $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \text{sen}B = \dfrac{15\cdot\text{sen}48º}{12} \approx 0'9289 \Rightarrow B \approx 68º\ 16'$

C $\rightarrow$ $C = 180º - (A+B) \approx 63º\ 44'$

c $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow c = \dfrac{12\cdot\text{sen}63º\ 44'}{\text{sen}48º} \approx 14'48$ cm.

12.4 CONOCIDOS TRES LADOS

Ejemplo: a = 10 cm. b = 8 cm. c = 7 cm.

Quedan por conocer los tres ángulos del triángulo.

A $\rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 100 = 64 + 49 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\cos A = \dfrac{64 + 49 - 100}{2 \cdot 8 \cdot 7} = 0'116 \Rightarrow A \approx 83^\circ\ 20'$

B $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 83^\circ\ 20'}{10} \approx 0'7946 \Rightarrow B \approx 52^\circ\ 37'$

C $\rightarrow$ $C = 180^\circ - (A+B) \approx 44^\circ\ 3'$

Actividades

20.- Dos individuos A y B observan un globo situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia de A a B es de 4 km. Los ángulos de observación del globo desde ambos individuos son 46º y 52º respectivamente. Hallar la altura del globo y la distancia a cada observador.

21.- Desde un cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m. hacia el pie de la torre, ese ángulo se hace de 60º. Calcula la altura de la torre.

22.- Calcula las longitudes de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales miden 20 cm. y 15 cm. respectivamente y forman un ángulo de 42º.

23.- Calcula los lados iguales y el área de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 24 cm. y el ángulo opuesto a la base mide 40º.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. EJERCICIOS

1.- Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

2 rad. $\frac{\pi}{5}$ rad. 3'5 rad.

2.- Sabiendo que sen 11º = 0'1908 y cos 35º= 0'8191 calcula:

a) sen 1811º
b) cos 55º
c) tg 1991º
d) cotg 79º

3.- a) Dibuja un ángulo que cumpla sen $\alpha = \frac{3}{5}$

b) Halla, con la calculadora, los ángulos que cumplen:

1) sen α = 0'728
2) cos β = - 0'91
3) tg a = - 27

4.- Si tg $(\alpha + \beta)$ = 4 y tg α = -2, halla tg 2β.

5.- Sabiendo que sen 6º = 0'1045, calcula las R.T. de

84º 174º 546º -6º

6.- Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)} = \frac{1}{\text{tga}}$

b) $2\ \text{tgx} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$ - senx = tgx

c) $\frac{2\text{senx} - \text{sen}2x}{2\text{senx} + \text{sen}2x} = \text{tg}^2 \frac{x}{2}$

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

b) tg2x + 2cosx = 0
c) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$
d) cos2x − 3senx + 1 = 0
e) $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$
f) 2senx = tg2x

8.- Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} sen^2x + cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ cos^2 x - sen^2y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} cos(x + y) = \dfrac{1}{2} \\ sen(x - y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} cos\,x \cdot cos\,y = \dfrac{1}{2} \\ tgx + tgy = 2 \end{cases}$

9.- ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a la una y media?

10.- Representa gráficamente las funciones y = senx, y = cosx, y = tgx

11.- Halla las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que cotgα = $\dfrac{1}{3}$

12.- Sabiendo que sen20º= 0'34 y cos20º = 0'94, calcula el seno, coseno y tangente de 70º, 110º, 160º, 200º y 340º

13.- Calcula las R.T. del ángulo 2a sabiendo que seca = $\dfrac{5}{4}$

14.- Si tga = 2 y tgb = $\dfrac{1}{3}$, calcula tg(a+2b), cotg(2a +b) y cotg (a-b).

15.- Sabiendo que tgx = $\dfrac{1}{3}$ halla razonadamente:

tg($\dfrac{\pi}{2} - x$), tg (π - x), tg($\dfrac{\pi}{2}$+x), tg(π+x), tg(-x) y tg($\dfrac{3\pi}{2}$-x).

16.- Si sena = $\dfrac{3}{5}$ y cosb = $\dfrac{5}{13}$, halla sen(a+b), cos(a-b), tg2a, cotg2b y sen3a.

17.- Demuestra las igualdades:

a) cotg(a+b) = $\dfrac{cot\,ga \cdot cot\,gb - 1}{cot\,ga + cot\,gb}$ **b)** cotg(45º+A) = $\dfrac{cot\,gA - 1}{cot\,gA + 1}$

18.- A partir de las R.T. de 30º, 45º y 60º calcular:

sen15º, sen150º, cotg105º, cos165º, sec75º, cosec135º.

19.- Sabiendo que $\cos x = \frac{-12}{13}$ y que $\text{cotg}\, y = \frac{24}{7}$ siendo x un ángulo del 2º cuadrante e y un ángulo del 1^er^ cuadrante, calcular sen(x+y) y cos(x-y).

20.- Resuelve las ecuaciones:

a) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

b) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$

c) $\cos x = \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2 x}$

d) $\cos 2x = 1 + 4\,\text{sen}x$

e) $4\,\text{sen}\frac{x}{2} + 2\cos x = 3$

f) $\text{sen}2x = -\sqrt{3}\cos x$

21.- Halla, sin usar calculadora, sen105º, cos67'5º y tg915º.

22.- Las R.T. de un ángulo a del 2º cuadrante son tales que sena = 3/4 . Calcula las restantes R.T.

23.- Sabiendo que tga= 0'35 y $a < \frac{\pi}{2}$, halla sen2a , cos2a y tg2a

24.- Sean a y b dos ángulos tales que $\text{tg}a = \frac{4}{5}$ y $\cos b = -\frac{3}{7}$ siendo $a < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Calcula:

a) sen2a b) sen2b c) sen(a+b) d) cos(a-b) e) cos2a
f) cos2b g) cos(a+2b) h) tg(a-b) i) tg2a j) cotg (a+b)

25.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6\cos^2\frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

b) $2\,\text{sen}x + 2\cos x = \sqrt{2}$

c) $2\,\text{sen}(x-30º) = -1$

26.- Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \text{sen}x - \text{sen}y = 1 \\ 2x + 2y = \pi \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen}x\cdot\cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x\cdot\text{sen}y = \frac{1}{4} \end{cases}$

27.- Demuestra las identidades: **a)** $\text{sen}2x = \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x}$

b) senb·cos(a-b) + cosb·sen(a-b) = sena

c) $\frac{1+\cos x}{\text{sen}x} = \frac{\text{sen}x}{1-\cos x}$

d) $1 - 2\cos 2x = 4\text{sen}^2x - 1$

28.- Hallar las R.T. del ángulo α sabiendo que $\text{tg}\alpha > 0$ y $\cos\alpha = -\frac{5}{12}$

29.- Hallar las R.T. del ángulo a siendo cotga = $\frac{\sqrt{6}}{2}$

30.- Calcular el valor de A siendo:

A = cos0º - 3·sen90º + 2·tg135º - cos120º - 4·cos270º

31.- Calcula las R.T. de 22º 30’

32.- Si sen12º = 0’2079 y cos28º = 0’8829, calcula:

sen40º tg14º cotg16º sec24º cos62º

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. EJERCICIOS

1.- Uno de los lados de un triángulo es doble de otro y el ángulo comprendido entre ellos es 60º. Resolver el triángulo.

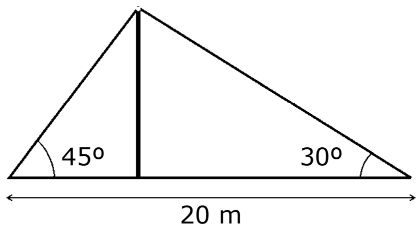
2.- Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a doble distancia?

3.- Una escalera de bomberos de 10 m. de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º , y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

4.- Conocidos los lados $a = \sqrt{6}$ m. y $b = \sqrt{3}$ m. de un triángulo ABC y sabiendo que el ángulo A es doble del ángulo B, calcular el lado c y los ángulos del triángulo.

5.- Desde la parte superior de un faro de 50 m. de altura sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión del barco es 16º y el ángulo de depresión de la playa es 60º. Hallar la distancia del barco a la playa.

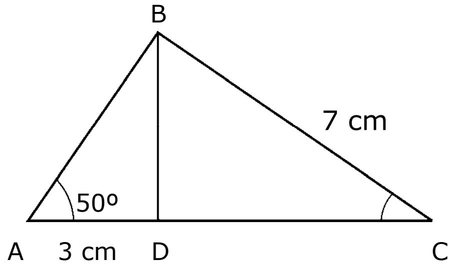
6.- Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable?



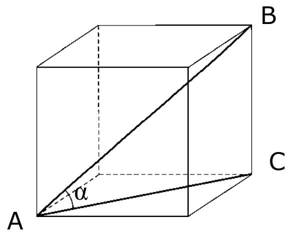
7.- Una estatua de 2'5 m. está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15º y la estatua bajo un ángulo de 40º. Calcula la altura del pedestal.

8.- Un avión vuela entre dos ciudades A y B que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29º y 43º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

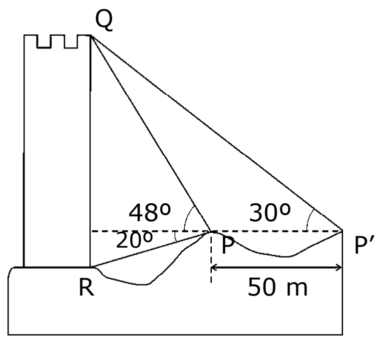
13.- Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC.



14.- Halla el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo con la diagonal del cubo.



15.- Halla la altura de la torre QR de pie inaccesible, con los datos de la figura.



16.- Calcula el área de un decágono regular de lado 8 cm.

CUESTIONES

1. Si cotga es negativa, ¿qué signo tendrá el producto seca · coseca?

2. Si la medida de un ángulo aumenta de 0º a 90º, su coseno ¿aumenta o disminuye?

3. Si tga = 3, ¿cuánto vale tg (180º-a)?

4. Sabemos que sena = 0'2 y está en el primer cuadrante. ¿Cuánto vale cos(90º + a) y sen(180º + a)?

5. ¿Puede un triángulo tener lados de 12, 7 y 3 cm. respectivamente? Razona la respuesta.

6. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $\cos\alpha = k$?, con $k>1$? . ¿Y si $-1 \leq k \leq 1$?

7. Expresa la forma general de todos los ángulos cuyas R.T. coinciden con:

a) 1111º **b)** 6200º **c)** $\frac{10\pi}{3}$ rad.

8. ¿Existe algún ángulo cuyo seno coincida con su secante?

9. Si sena = 1'2 ¿cuánto vale, sin realizar ningún cálculo, tg2a?

10. En un triángulo a = 2b y C = 60º ¿cuánto miden los ángulos B y C?

11. Relaciona estas expresiones con las R.T. del ángulo a:

a) $\text{sen}(\pi - a)$ $\cos(\pi - a)$ $\text{tg}(\pi - a)$
b) $\text{sen}(\pi + a)$ $\cos(\pi + a)$ $\text{tg}(\pi + a)$
c) $\text{sen}(2\pi - a)$ $\cos(2\pi - a)$ $\text{tg}(2\pi - a)$

12. Demuestra que si A, B y C son los ángulos de un triángulo, se verifica:

$$\text{sen}(A+B) - \text{sen}C = 0$$

13. Si sena = m y cosa<0, entonces sen2a es:

a) $-2m\sqrt{1-m^2}$ **b)** $2m\sqrt{1-m^2}$ **c)** $-2\sqrt{1-m^2}$ **d)** $2m$

14. El valor de cos48º·cos18º + sen48º·sen18º es:

a) 1/2 **b)** $\sqrt{3}/2$ **c)** -1/2 **d)** mayor que 1

15. Señala la afirmación correcta: **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

b) $\text{sen}\,(\pi-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

c) $\text{sen}\,(\pi+\alpha) = \cos\alpha$

d) nada de lo anterior es correcto

16. En un triángulo PQR se conocen los lados $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$ y el ángulo $\hat{P}$. La fórmula que permite conocer directamente $\overline{QR}$ es:

a) $\overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2 - 2\cdot\overline{PR}\cdot\overline{PQ}\cdot\cos\hat{P}$

b) $\overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2 + 2\cdot\overline{PR}\cdot\overline{PQ}\cdot\cos\hat{P}$

c) $\overline{QR} = \overline{PR}\cdot\dfrac{\text{sen}\,\hat{P}}{\text{sen}\,\hat{Q}}$

d) $\overline{QR} = \overline{PR}\cdot\text{sen}\,\hat{P}$

17. En un triángulo ABC se conocen a=2, b=3 y c=6. Entonces puede asegurarse que: **a)** $\cos\hat{A} = 36/41$

b) $\cos\hat{A} = 41/36$

c) ABC es un triángulo rectángulo

d) ABC no tiene solución

18. Si en el triángulo PQR, p=q=45, puedes afirmar que:

a) $\hat{P} = \hat{R}$

b) $\hat{P} = \hat{Q}$

c) r>p

d) Nada de lo anterior, porque no hay suficientes datos.

19. Si en el triángulo MNP, m=45, n=36, $\hat{P}$=179º, se puede asegurar que:

a) no hay solución

b) hay dos soluciones

c) MNP es isósceles

d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

NÚMEROS COMPLEJOS

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1.- Representar gráficamente números complejos.

2.- Obtener, a partir de una expresión cualquiera de un número complejo, todas las demás formas de expresión de dicho número.

3.- Operar con números complejos en todas sus formas de expresión (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicalización)

4.- Resolver ecuaciones en los números complejos.

5.- Resolver problemas sobre números complejos.

CONCEPTOS:

1. Números complejos: introducción y definición.
2. Opuesto, conjugado y afijo de un número complejo.
3. Representación gráfica de números complejos.
4. Operaciones con números complejos en forma binómica (+,-, ·,/)
5. Expresiones de un número complejo: cartesiana, binómica, polar y trigonométrica.
6. Operaciones en forma polar y trigonométrica: producto, cociente, potencia y raíz.

NÚMEROS COMPLEJOS

La necesidad de resolver ecuaciones del tipo $x^2+3 = 0$ obligó a ampliar el conjunto de los números reales (racionales e irracionales) conocido hasta el momento, ya que sus soluciones ($x = \pm\sqrt{-3}$) no se corresponden con ningún número real. Como, por otra parte, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$, toda la novedad quedaba reducida a la expresión $\sqrt{-1}$.

BOMBELLI, en su obra "Álgebra" (1572), empezó a considerar $\sqrt{-1}$ como un número, aunque su idea fue rechazada en los siglos posteriores por grandes matemáticos. No es hasta el siglo XVIII, cuando son reconocidos por la comunidad matemática a través de Euler (1707-1783) que los utilizó sin reparos bajo el apelativo de "imaginarios" por su carácter *no real*. Es por eso que EULER utilizó la letra i (imaginario) para referirse a $\sqrt{-1}$.

1. Definiciones

Definición 1: Se llama **" unidad imaginaria"** y se designa con la letra **i**, a la expresión:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

de donde se deduce:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

La ampliación del conjunto de los números reales (R) al conjunto de los **números complejos (C)** se produce al "cruzar" (o mezclar) la unidad imaginaria i con los n^{os} reales, a través de las operaciones suma, resta, multiplicación y división. De esta manera obtendremos números de la forma:

5i, 3 – i, 2+3i etc.

Definición 2: Se llama **número complejo** en forma binómica a toda expresión de la forma: $z = a + bi$ siendo $a,b \in R$, donde a representa la parte real y b la parte imaginaria

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in R\}$$

Ejemplo: el nº complejo 2–5i tiene parte real 2 y parte imaginaria -5

Intuitivamente, **a+bi** sería equivalente a: **a·1 + b·i** y significaría que el nº contiene **a** unidades reales(unos) y **b** unidades imaginarias (íes), es decir, "mezcla" **a** partes reales con **b** partes imaginarias.

Observa, además, que se verifica lo siguiente:

a) Si $b = 0$ $a+0i = a$ es un nº real. Por eso $R \subset C$.
b) Si $a = 0$ $0+bi = bi$ es un nº imaginario puro.
c) Si $a = b = 0$ $0+0i = 0$ (nº complejo 0)

Ejemplo: El nº 3i (0+3i) es imaginario puro y el nº -2 (-2+0i) es real

Definición 3: Dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$ son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, es decir, $a = c$ y $b = d$.

De la definición se deduce que no puede haber 2 n^{os} complejos distintos con la misma notación.

Definición 4: Dado el nº complejo $z = a+bi$, llamamos **opuesto** de z al nº:
$$-\mathbf{z} = -a-bi.$$

Ejemplo: el opuesto de $z = 3-2i$ es $-z = -3+2i$

Definición 5: Dado el nº complejo $z = a+bi$, llamamos **conjugado** de z al nº:
$$\bar{\mathbf{z}} = a-bi$$

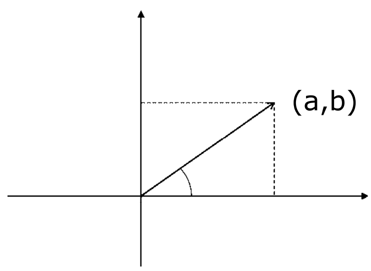
Ejemplo: el conjugado de $z = -3-2i$ es $\bar{\mathbf{z}} = -3+2i$

Definición 6: Se llama **afijo** de $z = a+bi$ al par (a,b)

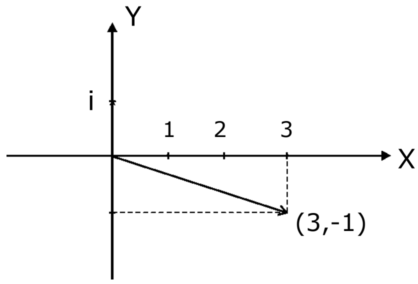
2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE N^{os} COMPLEJOS

Cada nº complejo $z=a+bi$ se representa mediante su afijo en el plano complejo, de forma que el eje X será el eje real, donde se representa la parte real **a**, y el eje Y será el eje imaginario donde se representa la parte imaginaria **b**.

A cada nº $z = a+bi$ le corresponde un **vector** de posición (a,b) que será su representación gráfica, cuyo extremo coincide con su afijo.



Ejemplo: la representación del nº 3-i es:



Actividades

1.- Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de éstos, cuáles son imaginarios puros:

$5 - 3i$, $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}i$, $-5i$, 7 , $\sqrt{3}\,i$, 0 , $-1-i$, $4i$

2.- Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ **b)** $3x^2 + 27 = 0$

3. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

3.1 SUMA/RESTA

La suma de dos números complejos en forma binómica es otro complejo, cuyas partes real e imaginaria son la suma respectiva de las partes reales e imaginarias de cada uno, es decir,

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Ejemplo:

$$(3-5i) + (\frac{1}{2}+i) = \frac{7}{2} - 4i$$

$$(3-5i) - (\frac{1}{2}+i) = \frac{5}{2} - 6i$$

3.2 PRODUCTO

$$(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + bci + bd\cdot \underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + (ad + bc)\cdot i$$

Ejemplo: $(3-5i)\cdot(8+3i) = 24+9i - 40i - 15i^2 = 24 - 31i - 15\cdot(-1) = 39 - 31i$

3.3 COCIENTE

Siempre que multiplicas un nº complejo por su conjugado obtienes un nº real.

Demuéstralo haciendo $(a+bi)\cdot(a-bi)=$

Este resultado es útil para dividir complejo, puesto que multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador estaríamos haciendo algo equivalente a racionalizar.

Ejemplo:

$$\frac{3-5i}{2+i}=\frac{(3-5i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{6-3i-10i+5i^2}{4-i^2}=\frac{1-13i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{13}{5}i$$

Actividad

3.- Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)$

b) $(3+2i)(4-2i)$

c) $\frac{1-4i}{3+i}$

d) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

e) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)$

f) $-2i-(4-i)5i$

g) $\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$

h) $\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

4. EXPRESIONES DE UN Nº COMPLEJO

Sabemos que la expresión **a+bi** se llama **forma binómica** del nº complejo. Si escribimos su afijo **(a,b)** estamos expresando el nº en forma **cartesiana.**

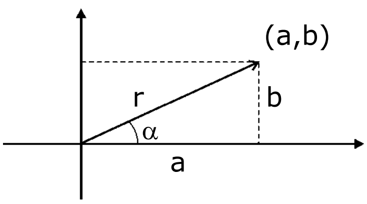
Ejemplo:	forma binómica	-3+4i
	forma cartesiana	(-3,4)

Ambas formas dependen de las coordenadas cartesianas del nº complejo.

Vamos a estudiar otras dos formas de expresión del nº complejo, más ventajosas por su rapidez operativa, que no dependen de las coordenadas cartesianas del nº sino de las **coordenadas polares**.

COORDENADAS POLARES

Cualquier punto de plano puede ser localizado a través de sus coordenadas cartesianas (a,b) o, lo que es lo mismo, a través de sus coordenadas polares (r,α) que definimos a continuación:



Definición 1: Llamamos **módulo** de z (**r**) al módulo de su vector de posición, es decir, por el teorema de Pitágoras,

$$\boxed{r = +\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definición 2: Llamamos **argumento** de z (α) al ángulo que forma su vector de posición con el semieje positivo de abscisas (eje X).

Observamos que $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}}$

IMPORTANTE

***** Es necesario determinar de antemano en qué cuadrante está z para elegir, de entre los dos posibles, el ángulo correspondiente a ese cuadrante*****

Ejemplo: nº complejo 1-i .
coordenadas cartesianas (1,-1)
coordenadas polares ($\sqrt{2}$, 315º) ya que:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135º \text{ ó } 315º$$

como (1,-1) está en el cuarto cuadrante, elegimos 315º.

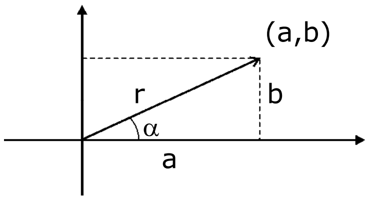
Definición 3: Se llama **forma polar** del nº complejo z, a la expresión $\mathbf{r}_{\alpha}$

Ejemplo: forma binómica 1 + i
forma cartesiana (1,1)
forma polar $(\sqrt{2})_{45º}$

Definición 4: Se llama **forma trigonométrica** del nº complejo z a la expresión:

$$\boxed{\mathbf{r(\cos\alpha + i\,sen\alpha)}}$$

Esta expresión se obtiene directamente de la binómica teniendo en cuenta lo siguiente:



$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\cdot\text{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cdot\cos\alpha$$

Como $z = a + bi = r\cos\alpha + r\text{sen}\alpha\cdot i \underset{\uparrow}{=} r(\cos\alpha + i\ \text{sen}\alpha)$

sustituyendo

Ejemplo: Dado el nº complejo $z = (2, 2\sqrt{3})$ escríbelo en las 4 formas.

Forma cartesiana $(2, -2\sqrt{3})$

Forma binómica $2 - 2\sqrt{3}\,i$

Referidas a coordenadas cartesianas

Pasando a coordenadas polares: $r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 300º$$

porque $\sqrt{3}$ es la tangente de 60º y α es del 4º cuadrante dadas sus coordenadas cartesianas. Por consiguiente:

Forma polar $4_{300º}$

Forma trigonométrica $4(\cos 300º + i\ \text{sen}300º)$

Referidas a coorden. polares

Actividades

4.- Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ **b)** $3i$ **c)** $-1 + \mathbf{i}$ **d)** -5

5.- Escribe en forma binómica los siguientes complejos:

a) $3_{240º}$ **b)** $5_{180º}$ **c)** $2_{135º}$ **d)** $4_{90º}$

6.- Hallar los números reales x e y para que se cumpla: $\dfrac{x+2i}{3+yi} = \left(\sqrt{2}\right)_{315º}$

Así, pasando de coordenadas cartesianas a polares o viceversa, conseguimos expresar un nº complejo en cualquiera de las 4 formas, a partir únicamente de una de ellas.

Descubrirás ahora que según el planteamiento de los problemas, sobre todo en el aspecto operativo, es mucho más ventajosa una forma que otra.

Piensa, por ejemplo, en calcular $(\sqrt{3}-i)^{10}$. ¡Si, si! tienes que multiplicar $(\sqrt{3}-i)$ 10 veces por sí mismo. No tiene gracia ¿verdad?

Observa cómo se multiplican números complejos en forma polar y trigonométrica.

5. OPERACIONES EN FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

5.1 PRODUCTO EN FORMA POLAR

Dados dos números complejos en forma polar, r_α y R_β, se cumple que su producto es otro nº complejo en forma polar, de módulo el producto de los módulos, y de argumento la suma de los argumentos. Por tanto,

$$\boxed{r_\alpha \cdot R_\beta = (r\cdot R)_{\alpha+\beta}}$$

Demostración:

Utilizaremos como "intermediaria" la forma trigonométrica de ambos números, ya que, en su expresión, se utilizan las operaciones suma y producto, lo que no ocurre en la forma polar.

$$r_\alpha \cdot R_\beta = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) = r\cdot R(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) =$$

$$= r\cdot R(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \underbrace{i^2}_{-1}\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) =$$

$$= r\cdot R(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i(\underbrace{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}_{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)})) =$$

$= r\cdot R(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\mathrm{sen}(\alpha+\beta)) = (r\cdot R)_{\alpha+\beta}$ pasando de nuevo a forma polar.

c.q.d.

Ejemplo:	$2_{30^o}\cdot 7_{65^o} = 14_{95^o}$

fácil, ¿eh?

Volvamos al ejemplo anterior.

¿Cómo calcularías ahora $(\sqrt{3}-i)^{10}$? Claro, pásalo a forma polar.

$$\left[\; r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^o \text{ por ser } (\sqrt{3},-1) \text{ del } 4^o \text{ C.} \;\right]$$

Entonces, $(\sqrt{3}-i)^{10} = \left(2_{330º}\right)^{10} = (2^{10})_{330º\cdot 10} = (2^{10})_{3300º} = (2^{10})_{60º}$

Razona esta igualdad

Ya has descubierto cómo realizar potencias de un nº complejo, pero vamos a escribirlo en general para una potencia cualquiera de un nº cualquiera.

5.2 POTENCIA EN FORMA POLAR

Dado el nº complejo r_α se cumple que:

$$\boxed{\left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\alpha}}$$

Esta fórmula recibe el nombre de **"fórmula de Moivre"**

Demostración: Sabemos que:

$$\left(r_\alpha\right)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots \cdot r_\alpha}_{n \text{ veces}} = (r \cdot r \cdot \ldots \cdot r)_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

Ejemplo: $\left(2_{50º}\right)^6 = (2^6)_{6\cdot 50º} = 64_{300º}$

Por eso, cada vez que tengas que elevar un nº complejo a una potencia, te interesará escribirlo en forma polar, si es que no lo estaba previamente.

5.3 DIVISIÓN EN FORMA POLAR

Dados dos números complejos en forma polar, r_α y R_β, se cumple que su cociente es otro nº complejo en forma polar, de módulo el cociente de los módulos, y de argumento la resta de los argumentos. Por tanto,

$$\boxed{r_\alpha / R_\beta = (r/R)_{\alpha-\beta}}$$

Demostración:

Aprovecharemos el hecho de que dividir es, en realidad, multiplicar para utilizar lo que hemos aprendido.

Llamaremos r'_ϕ al nº resultante del cociente, es decir, $\dfrac{r_\alpha}{R_\beta} = r'_\phi$

Sería entonces cierto que $r_\alpha = R_\beta \cdot r'_\phi$ y, por tanto, $r_\alpha = (R\cdot r')_{\beta+\phi}$

Sabemos que dos números complejos son iguales si tienen el mismo módulo y el mismo argumento, luego necesariamente $r = R\cdot r'$ y $\alpha = \beta + \phi$

Esto nos permite despejar r' y ϕ que eran nuestras incógnitas:

$$r' = \frac{r}{R} \quad \text{y} \quad \phi = \alpha - \beta \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Ejemplo: $\dfrac{2_{120º}}{5_{70º}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)_{50º}$

Actividades

7.- Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150º} \cdot 5_{30º}$ **b)** $5_{\frac{2\pi}{3}} : 1_{60º}$ **c)** $(1 - \sqrt{3}\, i)^5$

8.- Dados los números complejos $z_1 = 5_{45º}$, $z_2 = 2_{15º}$ y $z_3 = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z_1 \cdot z_3$ **b)** $\dfrac{z_1}{z_2^2}$ **c)** $\dfrac{z_1^3}{z_2 \cdot z_3^2}$

9.- Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Encuentra un criterio para calcular cualquier potencia de i de exponente natural.

10.- El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido entre el otro es $\frac{1}{2}$. Hállalos.

5.4 RAÍZ N-ÉSIMA DE UN Nº COMPLEJO EN FORMA POLAR

Dado el nº complejo r_α se cumple que:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad \text{donde } k=0,1,2\ldots,n-1$$

Demostración:

Sabemos que $\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta$ si $(R_\beta)^n = r_\alpha$.

(Queremos hallar R y β)

Entonces $\left(R^n\right)_{n\beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} R^n = r \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$

$n\beta$ y α pueden ser de 2 vueltas distintas, por ejemplo 30º y 390º a nada que n o β sean algo grandes. Como cada vuelta equivale a 2π, $k2\pi$ equivaldría a un nº cualquiera k de vueltas. Por eso, admitimos que $n\beta$ pueda ser igual a α más algún nº k de vueltas, que incluye la posibilidad k=0 por si son exactamente iguales.

Veamos ahora con un ejemplo, que k sólo toma valores comprendidos entre 0 y n-1

Ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180º}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{180º+2k\pi}{3}} = 2_{\frac{180º+2k\pi}{3}} = \begin{cases} 2_{60º} & \text{si } k=0 \\ 2_{180º} & \text{si } k=1 \\ 2_{300º} & \text{si } k=2 \\ 2_{420º} & \text{si } k=3 \end{cases}$

Observa que si aumentamos los valores de k sólo conseguimos repetir, en vueltas sucesivas de la circunferencia, las 3 raíces ya obtenidas.

Como desde 0 hasta n-1 hay n valores distintos, podemos deducir que existen n raíces n-ésimas de un nº complejo.

Ejemplo: $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{60º}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{60º+2k\pi}{4}} = \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2}\right)_{15º} & \text{si } k=0 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{105º} & \text{si } k=1 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{195º} & \text{si } k=2 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{285º} & \text{si } k=3 \end{cases}$

$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\text{tg } \alpha = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60º$ (1 er cuadrante)

Quizá hayas observado que la diferencia entre los argumentos de las raíces es siempre la misma: 90º en el caso de las raíces cuartas de $2_{60º}$, y 120º en el caso de las raíces cúbicas de -8.

Si te fijas, 90º es la cuarta parte de 360º y 120º es la tercera parte. ¿Se podría deducir que los argumentos de las raíces n-ésimas de un nº complejo distarán $\dfrac{360º}{n}$?

Si así fuera, bastaría con encontrar la 1ª raíz y sumar $\dfrac{360º}{n}$ a los sucesivos argumentos.

Intenta averiguar si es cierto y justificar por qué.

Actividades

11.- Halla las raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

12.- Calcula: **a)** $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt{-25}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}\,i}}$

13.- Resuelve en el conjunto de los números complejos (C), las ecuaciones:

a) $x^8 - 1 = 0$

b) $x^5 + 64x^2 = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

14.- Dado el complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, calcular:

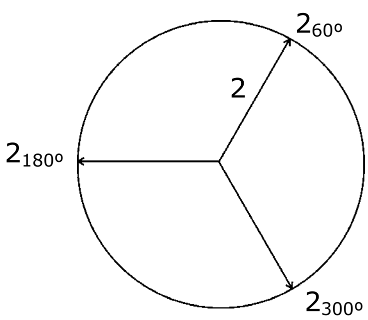
a. Su cuarta potencia.
b. Sus cuatro raíces cuartas.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

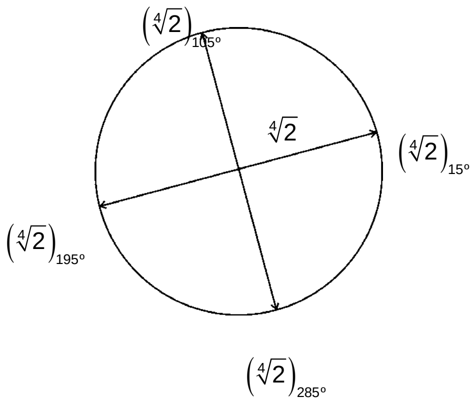
Las raíces de un nº complejo se pueden representar gráficamente en una circunferencia de radio igual al módulo de las raíces.

Ejemplo:

Las raíces cúbicas de -8 que hemos calculado anteriormente ($2_{60º}$, $2_{180º}$, $2_{300º}$) se representarían en una circunferencia de radio 2 de la siguiente forma:



Y, de la misma manera, las raíces cuartas de $1+\sqrt{3}\,i$ se representarían en una circunferencia de radio $\sqrt[4]{2}$ como sigue:



NÚMEROS COMPLEJOS. EJERCICIOS Y CUESTIONES

1.- Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2 + \sqrt{3}\,i$ y $2 - \sqrt{3}\,i$ **b)** $-3i$ y $3i$

2.- ¿Cuánto debe valer x (real) para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

3.- Completa el siguiente cuadro:

F. CARTESIANA	F. BINÓMICA	F. POLAR	F. TRIGONOMÉTRICA
$(2, -2\sqrt{3})$			
	$-3 - 3i$		
		$5_{270º}$	
			$3(\cos 120º + i\,\text{sen}\,120º)$

4.- El número $3+3i$ es la raíz cuarta de un cierto nº complejo z. Halla las otras tres raíces cuartas de z, así como dicho nº z.

5.- Determina k para que el cociente $\dfrac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2 - i$.

6.- Calcula a y b para que se verifique $(a+bi)^2 = 3+4i$.

7.- Calcula el valor de a y b para que se verifique

$$a - 3i = \frac{2+bi}{5-3i}$$

8.- Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea:

a) un nº imaginario puro **b)** un nº real

9.- Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\dfrac{\pi}{3}$, y la suma de sus módulos 8.

10.- El producto de dos números complejos es -8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúlalos.

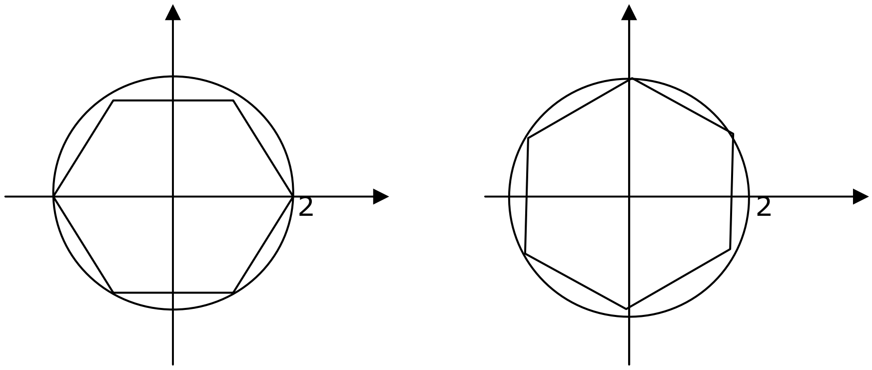
11.- La suma de dos n^{os} complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?.

12.- La suma de dos n^{os} complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2 y el cociente de éste entre el segundo es un nº real. Hállalos.

13.- El complejo $3_{40º}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el nº complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

14.- Una de las raíces cúbicas de un nº complejo es 1 + i. Halla dicho nº así como las otras raíces cúbicas.

15.- Halla los n^{os} complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:



16.- Resolver las ecuaciones: **1)** $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$
2) $x^3 - 64i = 0$
3) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
4) $x^4 - 27x = 0$
5) $x^2 - 2x + 2 = 0$

17.- Calcular a para que el número complejo $z = \frac{2 + ai}{1 - i}$ sea:

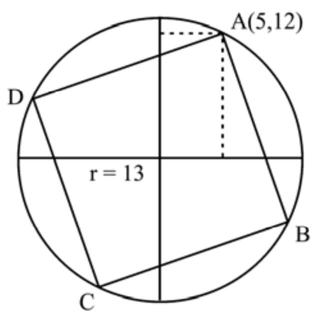
c. Imaginario puro.
d. Real.

18.- Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene parte real 2 y su producto vale – 51 + 8i.

19.- Encontrar un número complejo tal que sumándolo con $\frac{1}{2}$ dé otro número complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º.

20.- La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo 5. Hállalos y determina su producto y su cociente.

21.- Los vértices del cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 13.



CUESTIONES

1.- Demuestra que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2.- Prueba que el producto de dos números complejos conjugados cualesquiera es un nº real positivo.

3.- Si a un nº complejo z lo multiplicamos por un nº real k ¿qué le ocurre a su módulo? ¿y a su argumento?.

4.- Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El producto de dos números complejos nunca puede ser un nº real.
b) El producto de dos números complejos es igual al producto de sus opuestos.
c) Dado un nº complejo z, el módulo de su conjugado es igual al módulo de su opuesto.
d) Los complejos que verifican $|z| = 2$ tienen sus afijos situados en una circunferencia de radio 2 y de centro el origen.

5.- Si en una ecuación de segundo grado una de sus raíces es un nº complejo ¿podría ser la otra raíz un nº real?.

6.- ¿Podrías encontrar una relación entre las dos raíces de una ecuación de segundo grado si éstas son dos números complejos?

7.- Si z y w son dos números complejos cualesquiera y $\overline{z}$ y $\overline{w}$ son sus respectivos conjugados, se puede asegurar que $z\cdot\overline{w} + \overline{z}\cdot w$ es:

a) real **b)** imaginario puro **c)** 0 **d)** de módulo 1

8.- Si se sabe que una raíz cuarta de z es 1+i, entonces z es:

a) -4 **b)** -4i **c)** 4 **d)** 4+2i

9.- Las otras raíces del nº z del ítem anterior son:

a) 1-i, -1 **b)** 1-i, i, -i **c)** 1-i, -1+i, -1-i **d)** 1-i, -1, -i

10.- El conjunto de los números complejos de argumento $\frac{\pi}{3}$ está sobre:

a) la recta de ecuación $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ **b)** la recta de ecuación $y = \sqrt{3}\,x$

c) la recta de ecuación $y = x$ **d)** una circunferencia de radio $\frac{\pi}{3}$ y centro (0,0)

11.- Señala la afirmación falsa:

a) la parte real de i^2 es -1 **b)** la parte imaginaria de 1+i es i
c) la parte imaginaria de -1 es 0 **d)** la parte real de 2+3i es 2

UNIDAD DIDÁCTICA 5

VECTORES EN EL PLANO.

PRODUCTO ESCALAR.

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Operar con vectores utilizando sus coordenadas y en forma gráfica.
2. Estudiar la dependencia e independencia lineal entre vectores.
3. Expresar un vector respecto a bases distintas.
4. Calcular el producto escalar y el módulo de vectores, utilizándolo para resolver algunos problemas geométricos en el plano.
5. Hallar el ángulo entre dos vectores.

CONCEPTOS:

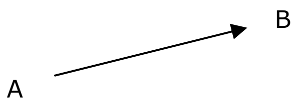
1. Vectores en el plano. Vector fijo y libre.
2. Operaciones con vectores.
3. Dependencia e independencia lineal entre vectores
.
4. Bases de V^2.
5. Producto escalar: definición, propiedades y expresión analítica.
6. Ángulo entre dos vectores.

VECTORES EN EL PLANO

1. INTRODUCCIÓN

Recordaremos de cursos anteriores la noción de vector, tanto fijo como libre. Sabemos que hay conceptos físicos que quedan determinados sólo con un valor numérico (temperatura, rozamiento…) y que reciben el nombre de magnitudes escalares. Sin embargo, otros conceptos como la fuerza que actúa sobre un cuerpo o la velocidad con que se mueve requieren para su determinación, no sólo de un valor numérico que determine su intensidad, sino del conocimiento de la dirección en que se realiza dicha fuerza y, dentro de esa dirección, en cuál de los dos sentidos (avance o retroceso) actúa. Son las magnitudes vectoriales, que se visualizan o representan esquemáticamente a través de los vectores.

<u>Definición 1</u> : Se llama vector $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado desde A (origen) hasta B (extremo).



Los vectores pueden utilizarse para representar conceptos físicos como la fuerza.

(Supón que estás situado en el punto B y que tiras de un carro (A) para atraerlo hacia ti. No representarías igual esa fuerza si fueras tú el que está situado en A y B fuera el carro).

Cada vector fijo $\overrightarrow{AB}$, además de origen y extremo consta de:

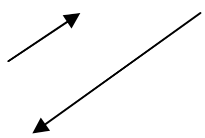
a) MÓDULO: longitud del segmento $\overrightarrow{AB}$. Se escribe $|\overrightarrow{AB}|$

b) DIRECCIÓN: la de la recta que lo contiene o cualquiera de sus paralelas.

c) SENTIDO: el del recorrido desde A hasta B.

Lógicamente, no pueden compararse los sentidos de dos vectores que no tengan previamente la misma dirección.

Ejemplo:



Estos vectores tienen la misma dirección pero distinto módulo y sentido

Dibuja dos vectores del mismo módulo y distinta dirección. Compara sus sentidos.

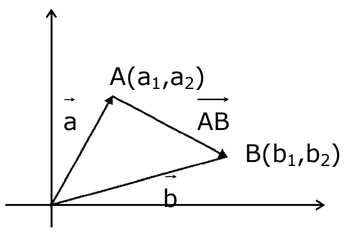
2. DEFINICIONES

Definición 2: Se llaman **componentes** de un vector $\overrightarrow{AB}$ a las coordenadas de su extremo menos las de su origen, es decir, si las coordenadas de A y B son respectivamente (a_1,a_2) y (b_1,b_2) se cumple que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1,b_2) - (a_1,a_2) = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$$

> *Ejemplo:* Si A(2.-1) y B(1,3) , el vector $\overrightarrow{AB}$ **=** (1-2 , 3-(-1)) = (-1,4)

Se puede justificar esta afirmación con el siguiente razonamiento:



Se observa en el dibujo que $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, de donde se deduce que $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores de posición, sus componentes son las de su extremo, luego: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 , b_2) - (a_1 , a_2) = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$ que es lo que queríamos demostrar.

Llamamos **vector nulo** $\vec{0}$ a aquel cuyo extremo y origen coinciden.

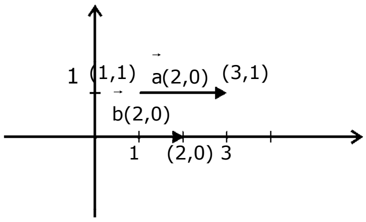
Definición 3 : Dos vectores se dicen **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Si pensamos en todos los vectores equipolentes a uno dado y los consideramos un solo vector que puede desplazarse paralelamente a sí mismo, estaremos ante lo que llamamos VECTOR LIBRE.

Definición 4: Se llama **vector libre** al conjunto formado por un vector y todos sus equipolentes.

Se representan con una letra minúscula $\vec{a}$, $\vec{b}$ … puesto que no dependen del origen y el extremo.

El conjunto de todos los vectores libres del plano se escribe V^2.



Observa en el gráfico anterior que, aunque son distintos los orígenes y extremos, la resta de extremo menos origen coincide cuando son el mismo vector libre. Es decir, las componentes de un vector son únicas.

Al igual que con los números, los vectores admiten las operaciones entre ellos, pero verás que aunque se suman y restan con facilidad y pueden multiplicarse por un número, la división entre ellos no existe como operación, y el producto puede realizarse de dos maneras distintas: escalar y vectorialmente. Nosotros sólo estudiaremos este curso el producto escalar y dejaremos para 2º Bachiller el producto vectorial.

3. OPERACIONES CON VECTORES

3.1. SUMA / RESTA

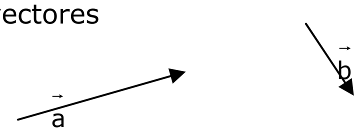
Dados los vectores $\vec{u}(a,b)$ y $\vec{v}(c,d)$ se define su suma como el vector

$$\vec{u}+\vec{v} = (a+c\ ,\ b+d)$$

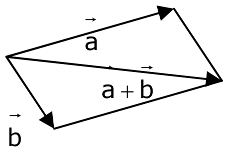
e igualmente se define su resta como el vector $\vec{u} - \vec{v} = (a-c\ ,\ b-d)$.

Ejemplo: Si $\vec{u} = (-3,5)$ y $\vec{v} = (2,-2)$ entonces $\vec{u}+\vec{v} = (-1,3)$ y $\vec{u}-\vec{v} = (-5, 7)$

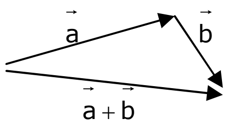
Los vectores pueden sumarse también gráficamente a través de la regla del paralelogramo. Para ello, se dibujan los dos vectores con el mismo origen y se traza el paralelogramo que forman. El vector suma será la diagonal de dicho paralelogramo, teniendo como origen el mismo que los vectores sumados. Es decir, dados los vectores



su suma será:



Para simplificar este proceso, se puede colocar el origen del segundo vector en el extremo del primero de la siguiente manera:



Es evidente que si fueran vectores fijos en vez de libres la suma no podría realizarse, porque sería necesario modificar el origen y el extremo de uno de ellos para colocarlos con el mismo origen y, por ello, no serían los vectores iniciales sino otros distintos los que se estarían sumando.

Esta es la razón por la que no utilizaremos nunca vectores fijos, salvo para definir los libres que sí son operables.

La operación resta $\vec{a}-\vec{b}$ se realiza sumando al vector $\vec{a}$ el opuesto de $\vec{b}$ que es el vector de igual módulo y dirección que $\vec{b}$ y sentido opuesto.

3.2. PRODUCTO POR UN Nº REAL

Dados el vector $\vec{u}(a,b)$ y el nº real k, se define $k\cdot\vec{u}$ como el vector $k\cdot\vec{u}=(ka,kb)$

Ejemplo: Si $\vec{a}=(-5,2)$ $3\cdot\vec{a}=(-15,6)$

Podemos deducir de la definición que:

1) El **módulo** de $k\cdot\vec{a}$ es el módulo de $\vec{a}$ k veces, pero *¿qué pasa si k es negativo?*
Intenta escribir una igualdad que relacione $|k\cdot\vec{a}|$ *con* $|\vec{a}|$.
Completa:
2) La **dirección** de $k\cdot\vec{a}$ es

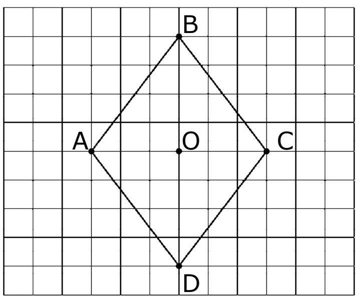
3) El **sentido** de $k\cdot\vec{a}$ es

Para ayudarte a pensar, dibuja un vector cualquiera y multiplícalo por 3 y por -3. Confirma con algún compañero lo que has averiguado.
¿Qué ocurre si lo multiplicas por k=0?

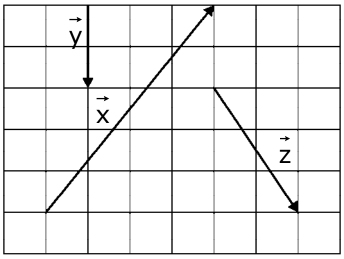
Actividades

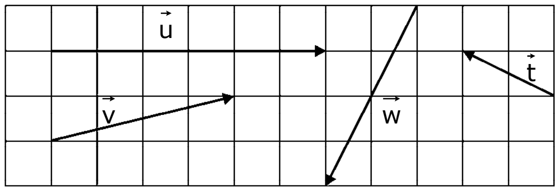
1.- Observa el rombo de la figura y calcula:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}$
b) $\vec{OB}+\vec{OC}$
c) $\vec{OA}+\vec{OD}$
d) $\vec{AB}+\vec{CD}$
e) $\vec{AB}+\vec{AD}$
f) $\vec{DB}-\vec{CA}$



2.- Dados los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, hemos obtenido con ellos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$ al realizar las siguientes operaciones: $\vec{x}+2\vec{y}$, $\vec{y}+\vec{z}+\vec{x}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{z}-\vec{x}-2\vec{y}$. Asocia cada expresión a su resultado.





Para poder multiplicar vectores introduciremos primero algunos conceptos nuevos.

4. COMBINACIONES LINEALES

De la misma manera que podemos formar nuevos colores a partir de alguno dado, mezclando cierta cantidad de cada uno,

Verde oscuro = 20g. de azul + 5g. de amarillo

también podemos obtener nuevos vectores "mezclando ciertas cantidades" de otros conocidos:

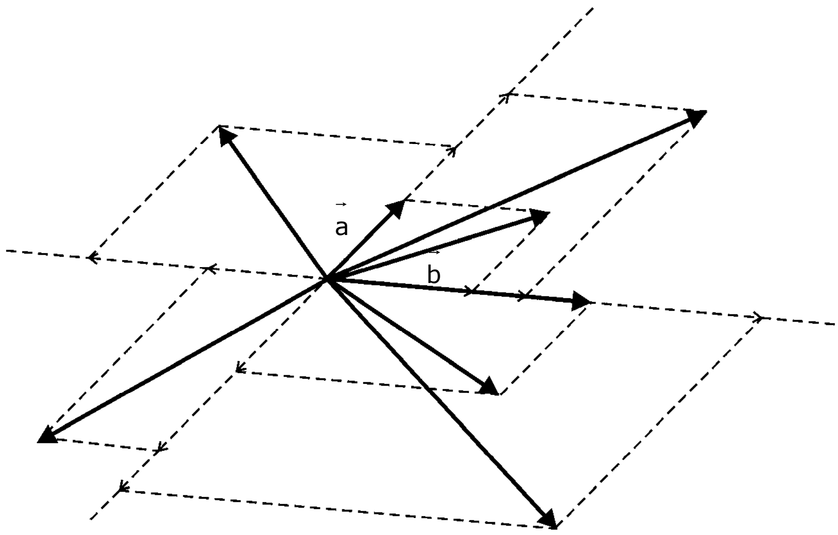
$$(3,-5) = 3\cdot(1,-3) + 2(0,2)$$

Diremos que el vector (3,-5) es una <u>combinación lineal</u> de los vectores (1,-3) y (0,2). En general:

<u>Definición 5:</u> Dados los vectores $\{\vec{u},\vec{v}\}$, se dice que el vector $\vec{w}$ es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen dos números reales α y β tales que

$$\boxed{\vec{\mathbf{w}} = \alpha\,\vec{\mathbf{u}} + \beta\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

Gráficamente, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de direcciones distintas, sus combinaciones lineales serían las diagonales de todos los paralelogramos que se pudieran formar estirándolos y encogiéndolos, dado que sus productos por números los estiran o encogen en ambos sentidos, y las sumas producen las diagonales.



¿Podríamos afirmar que todos los vectores del plano pueden escribirse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si éstos tienen direcciones distintas?
¿Y si tienen la misma dirección?

Imagina ahora cómo serían las combinaciones lineales de un solo vector $\vec{u}$. ¿Qué espacio generarían?

NOTA: El vector nulo $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores, dado que α y β pueden ser 0, es decir, $\vec{0} = 0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v}$

Actividades

3.- Expresa el vector $\vec{a}(1,5)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3,-2)$ y $\vec{c}(4, -\frac{1}{2})$.

4.- Escribe un vector combinación lineal de los vectores (1,3) y (0,2), y un vector combinación lineal de (3,-1)

<u>Definición 6:</u> Se dice que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **linealmente independientes** si ninguno de ellos es combinación lineal del otro, es decir, si $\vec{u} \neq \alpha\cdot\vec{v}$.

En caso contrario, se dice que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **linealmente dependientes**.

Ejemplo: los vectores (3,-2) y (1,5) son linealmente independientes dado que al comprobar si (3,-2) = $\alpha\cdot$ (1,5) obtendríamos que (3,-2) = (α,5α) de donde 3 = α y -2 = 5α lo que nos daría un sistema incompatible, pues α no puede ser igual a 3 y a $-\frac{2}{5}$ a la vez.

Sin embargo, los vectores (2,-1) y (6,-3) son linealmente dependientes porque (6,-3) = 3·(2,-1)

Gráficamente, si dos vectores en el plano son linealmente dependientes, tienen la misma dirección. Y si son independientes, tienen direcciones distintas.

¿Puede haber tres vectores linealmente independientes en un plano? Razona tu respuesta.

5. BASES EN V^2

Definición 7: Dos vectores { $\vec{u}$, $\vec{v}$ } forman una **base** de V^2 si:

1) son linealmente independientes

2) son un sistema generador, es decir, cualquier otro vector de V^2 se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Volviendo a los colores, y como ejemplo comparativo, podríamos afirmar que los colores {rojo, azul, amarillo} forman una base del conjunto de colores (de hecho se llaman básicos) ya que sus combinaciones, generan el resto de colores y no pueden generarse entre ellos (son independientes).

Podríamos entender por base, un sistema generador mínimo.

Podemos deducir entonces, que cualquier par de vectores independientes de V^2 forma una base, y que, por tanto, hay un número infinito de ellas. Destacaremos, de entre todas, la **base canónica B= { (1,0) , (0,1) }** que es la más utilizada. (Observarás sus ventajas más adelante).

Ejemplo: {(0,5),(-1,3)} forman una base. *Compruébalo.*

Actividad

5.- ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) (3,-1), (-3,1) **b)** (2,6) , ($\frac{2}{3}$,2) **c)** (5,-4), (5,4)

Definición 8: Se llaman **coordenadas** del vector $\vec{w}$ respecto a la base {$\vec{u}$, $\vec{v}$} al par de números reales α y β tales que: $\vec{w} = \alpha\cdot\vec{u} + \beta\cdot\vec{v}$

Por supuesto, cada vector tiene diferentes coordenadas en bases distintas.

Ejemplo: Halla las coordenadas del vector (6,-3) en la base {(0,5),(-1,3)}

$(6,-3) = \alpha \cdot (0,5) + \beta \cdot (-1,3) \Rightarrow \begin{cases} 6 = -\beta & \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = -6} \\ -3 = 5\alpha + 3\beta & \Rightarrow \quad -3 = 5\alpha - 18 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 3} \end{cases}$

Las coordenadas son 3 y -6.

Actividad

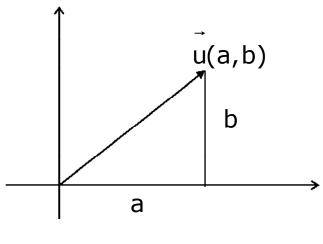
6.- Calcula las coordenadas del mismo vector (6,-3) en la base {(1,1), (2,-4)} y en la base canónica. ¿Qué observas en esta última base?

Definición 9: Se llama **módulo** de un vector $\vec{u}$ a su longitud. Se escribe $|\vec{u}|$ y se calcula

$$|\vec{u}| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

siendo (a,b) sus coordenadas en una base ortonormal. (Entenderás el concepto de base ortonormal al final de esta página).

Evidentemente, la fórmula se debe al teorema de Pitágoras.



Ejemplo: $\vec{u} = (3,-2)$ $\quad |\vec{u}| = +\sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Definición 10: Un vector se dice **unitario** si tiene módulo 1.

Para convertir un vector en unitario, basta con dividirlo entre su módulo.

Si $\vec{u} = (3,4)$ tiene módulo 5 ($|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$) , su quinta parte $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u}}{5} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ tiene módulo 1. *Compruébalo.*

Definición 11: Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si son perpendiculares.

Definición 12: Una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice **ortogonal** si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.
Una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice **normal** si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son unitarios.
Una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice **ORTONORMAL** si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y unitarios.

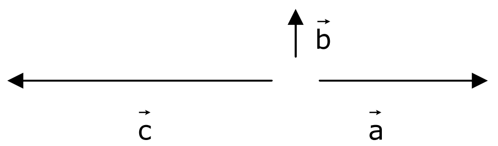
El ejemplo más utilizado de ésta última es la base canónica B= {(1,0) , (0,1)}.

6. PRODUCTO ESCALAR

Definición 13: Se llama producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al nº real resultante de multiplicar sus módulos y el coseno del ángulo que forman, es decir,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

NOTA: Se entiende por ángulo entre dos vectores, el que va del primero al segundo por el camino más corto.



$(\vec{a},\vec{b}) = 90º$ $(\vec{b},\vec{a}) = 270º = -90º$
$(\vec{a},\vec{c}) = 180º$ $(\vec{c},\vec{b}) = -90$

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN

1. Se llama producto escalar porque el resultado de multiplicar dos módulos por un coseno es un nº real.

2. Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$ $(\vec{a} \perp \vec{b})$ entonces $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ya que $\cos\{90º, 270º\}$ **= 0 .**

   Por el contrario, si sabemos que $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ podemos deducir que o bien $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares (es 0 el coseno) o alguno de los dos es el vector nulo (es 0 algún módulo). Por eso podemos afirmar que:

"Dos vectores no nulos son ortogonales ⇔ su producto escalar es 0"

3. $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ un vector al cuadrado es igual a su módulo al cuadrado ya que: $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\underbrace{\cos 0º}_{1} = |\vec{a}|^2$

4. Se cumple la propiedad conmutativa $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ ya que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{b},\vec{a})$$

como los módulos son números reales, cumplen la conmutativa y los ángulos, aunque son opuestos por tener sentidos contrarios, tienen el mismo coseno como ya sabemos por la reducción al primer cuadrante.

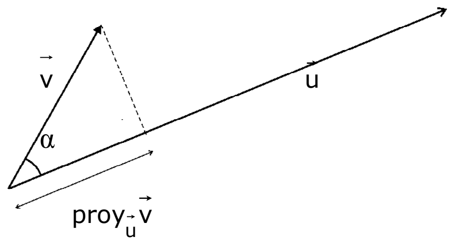
(cosb = cos(-b))

5. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales entonces $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ya que

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + \underbrace{2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}}_{0} + (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

Intenta comprobar que estás ante el teorema de Pitágoras. Investiga también lo que ocurriría en caso de no ser perpendiculares $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$*.*

6. Gráficamente, se puede interpretar el producto escalar de dos vectores como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



Observamos que $\cos\alpha = \dfrac{\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

Si sustituimos en la definición de producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

obtenemos: $\mathbf{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot \textbf{proy}_{\vec{u}}\vec{v}}$ que confirma lo que habíamos afirmado en un principio.

La definición de producto escalar de dos vectores exige, para que pueda aplicarse, que se conozcan o puedan calcularse los módulos de ambos vectores y el ángulo que forman. Pero lo habitual es que los vectores vengan dados por sus componentes o coordenadas en una cierta base. Es por eso que se hace necesario encontrar otra manera de calcular el producto escalar de vectores a partir de sus componentes.

7. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y una base cualquiera $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.
Sabemos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son combinación lineal de los vectores de la base y, por tanto, tendrán unas coordenadas respectivas en dicha base. Supongamos que:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_1 \cdot \vec{u} + b_2 \cdot \vec{v}$$

entonces se cumplirá: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v}) \cdot (b_1 \cdot \vec{u} + b_2 \cdot \vec{v}) =$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{u})^2 + a_1 \cdot b_2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + a_2 \cdot b_1 \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{v})^2$$

Para poder desarrollar esta igualdad sería necesario conocer el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el ángulo que forman para poder calcular el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Si proponemos que la base B sea ORTOGONAL , favoreceríamos este desarrollo, pues al conocer el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (90º) podríamos afirmar que tanto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como $\vec{v} \cdot \vec{u}$ serían iguales a 0, por tanto, el producto quedaría:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{u})^2 + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{v})^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{consecuencia } 3}}{=} a_1 \cdot b_1 \cdot |\vec{u}|^2 + a_2 \cdot b_2 \cdot |\vec{v}|^2$$

Si además proponemos que la base sea **ORTONORMAL** (vectores perpendiculares y unitarios) el producto alcanzaría su expresión más favorable en cuanto a sencillez, pues al ser 1 los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendríamos que:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$$

Esta fórmula sólo es cierta si la base es ortonormal; lo que favorece la elección, si es posible, de la base canónica.

Ejemplo:	(2,-5)·(-3,-1) = 2·(-3) + (-5)·(-1) = -6 + 5 = -1

Actividades

7.- Dados los vectores $\vec{u}(2,3)$. $\vec{v}(-3,1)$ y $\vec{w}(5,2)$ calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b)** $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

8.- Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{u}(3,-5)$ y $\vec{v}(x,2)$ sea igual a 7.

9.- Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4,-2)$

b) El módulo de $\vec{u}$ sea $\sqrt{34}$

8. ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Podemos ahora calcular el ángulo formado por dos vectores sin más que aplicar la definición de producto escalar y su expresión analítica.

Sabemos que $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Suponiendo que (a_1,a_2) y (b_1,b_2) son las coordenadas respectivas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en una base ortonormal, tendríamos que:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$$

NOTA: Ten en cuenta que esta fórmula sólo es válida si las coordenadas de los vectores están referidas a una base ORTONORMAL.

Habrás observado ya las ventajas de la base canónica. Por ello, salvo que se especifique otra cosa, entenderemos que los vectores están expresados en dicha base.

Ejemplo: Calcula el ángulo determinado por los vectores $\vec{a}=(2,2)$ y $\vec{b}=(3,0)$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot3+2\cdot0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{9+0}} = \frac{6}{\sqrt{8}\cdot3} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \mathbf{45^\circ}$$

Actividades

10.- Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

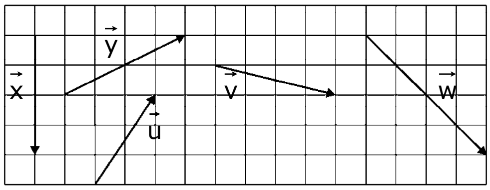
a) $\vec{u}(3,2)$, $\vec{v}(1,-5)$ **b)** $\vec{a}(1,6)$, $\vec{b}(-\frac{1}{2},-3)$

11.- Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7,1)$ y $\vec{b}(1,x)$ formen un ángulo de 45º.

VECTORES EN EL PLANO. PRODUCTO ESCALAR. EJERCICIOS y CUESTIONES

1.- Escribe los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x},\vec{y})$?



2.- Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son (3,-5) y (-2,1) obtén las coordenadas de :

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$

3.- Dados los vectores $\vec{a}(3,-2)$, $\vec{b}(-1,2)$ y $\vec{c}(0,-5)$ calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

4.- Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x,y)$ ortogonal a $\vec{u}(3,4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.

5.- Dados $\vec{a}(2,1)$ y $\vec{b}(6,2)$ halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.

6.- Siendo $\vec{u}(5,-b)$ y $\vec{v}(a,2)$ halla a y b sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

7.- Dado el vector $\vec{u}(6,-8)$, halla:

a) Los vectores unitarios de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

d) El vector de la misma dirección que $\vec{u}$ y sentido contrario, de módulo 2.

8.- Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

9.- Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

10.- Halla las coordenadas de un vector $\vec{b}$ sabiendo que forma un ángulo de 60º con $\vec{a}(2,4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

11.- Dados los vectores $\vec{a}(1,-1)$ y $\vec{b}(2,x)$ calcula x para que dichos vectores:

a) sean perpendiculares
b) formen 60º
c) sean paralelos

CUESTIONES

1.- Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

a) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ **b)** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ **c)** $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot\vec{c}$ **d)** $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

2.- Busca un contraejemplo para demostrar que si $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ no se deduce que $\vec{b}=\vec{c}$.

3.- Demuestra que todo vector $\vec{u}(a,b)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores (0 , x) y (t , t) siendo x y t números reales.

4.- Si multiplicamos un vector $\vec{u}$ por un nº real k , siendo k>1, halla la relación que existe entre el módulo, dirección y sentido de $\vec{u}$ y de $k\vec{u}$. ¿Qué ocurriría si $-1 < k < 1$ o $k < -1$?

5.- Si el conjunto $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ es una base del espacio V^2, razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones (*):

a) El conjunto $\{\vec{u}, -\vec{v}\}$ es una base de V^2.

b) El conjunto $\{\vec{u}, -\vec{v}\}$ es linealmente dependiente.

c) Todos los vectores de V^2 los podemos expresar como una combinación lineal del conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, -\vec{v}\}$.

d) El conjunto $\{\vec{v}, -\vec{v}\}$ es una base de V^2.

6.- Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones(*):

a) Existe alguna base de V^2 formada por tres vectores.
b) Dos vectores cualesquiera son siempre linealmente independientes.
c) Si $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ es una base del espacio V^2, entonces todo vector de V^2 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores del conjunto $B' = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, siendo $\vec{w}$ un vector cualquiera.
d) Dos vectores cualesquiera siempre forman una base de V^2.

(*) Recuerda que si quieres demostrar que un enunciado es falso, es suficiente con que encuentres un contraejemplo, es decir, un caso concreto en el que no se cumpla. Sin embargo, si quieres demostrar que es verdadero, debes argumentarlo en todos los casos posibles sin excepción (como será imposible analizar cada caso uno a uno, se puede recurrir a letras genéricas para realizar la demostración, o bien utilizar definiciones, propiedades o teoremas ya establecidos en la parte teórica).

7.- Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones(*):

a) Si el producto escalar de dos vectores es distinto de 0, se cumple que los vectores son linealmente independientes.

b) Si el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 0, entonces $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ es una base del espacio V^2.

c) El vector nulo es ortogonal a cualquier vector, ya que su producto escalar es 0.

d) Si $\vec{u}$ es un vector cualquiera, se cumple que:

$$\vec{u} \cdot (-\vec{u}) = -|\vec{u}|^2$$

8.- Si el producto escalar de dos vectores es negativo, se puede asegurar que

a) esos dos vectores tienen sentidos opuestos
b) esos dos vectores forman un ángulo obtuso
c) uno de los dos vectores tiene módulo negativo
d) nada de lo anterior. No tiene sentido el planteamiento.

9.- Si $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15}{2}$, se puede asegurar que

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no están dados en forma normal
b) el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es obtuso
c) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares
d) no tiene sentido el planteamiento.

10.- Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$:

a) forman una base ortonormal
b) forman una base no ortonormal
c) no forman base
d) no tiene sentido el planteamiento.

11.- La expresión $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ representa

a) un vector de la dirección y sentido de $\vec{a}$ y módulo 1
b) un vector de la dirección y sentido de $\vec{a}$ y módulo $\dfrac{1}{|\vec{a}|}$
c) el coseno del ángulo que forma $\vec{a}$ consigo mismo.
d) Nada. No se pueden dividir vectores por números.

12.- ¿Qué valores han de darse a m para que los vectores $\vec{a}(m,2)$ y $\vec{b}(-6,3m^2)$ expresados en una base ortonormal, sean perpendiculares?

a) 1 y 2 **b)** 0 y 2 **c)** 1 **d)** 0 y 1

13.- En un cuadrado ABCD (con los vértices dados en ese orden) cuyo lado mide 1, señala cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

a) $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| = 1$
b) $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = 0$
c) $|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{BA}| = 1$
d) $|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = 0$

UNIDAD DIDÁCTICA 6

LA RECTA EN EL PLANO

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Obtener todas las ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua, general, punto-pendiente, explícita y canónica.
2. Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano.
3. Calcular el ángulo entre dos rectas.
4. Determinar una recta perpendicular a otra por un punto dado.
5. Obtener la distancia de un punto a una recta o entre dos rectas paralelas.
6. Calcular la mediatriz de un segmento y las bisectrices entre dos rectas.
7. Calcular el punto simétrico de uno dado respecto a una recta.
8. Resolver problemas relacionados con distancias, ángulos, mediatrices y bisectrices.

CONCEPTOS:

1. Ecuaciones de la recta.
2. Determinación de una recta. Puntos alineados.
3. Posición relativa de dos rectas en el plano.
4. Ángulo entre dos rectas.
5. Distancia punto-recta y recta-recta.
6. Lugares Geométricos.
7. Mediatriz de un segmento. Bisectrices de dos rectas.
8. Recta perpendicular a otra por un punto.

LA RECTA EN EL PLANO

1. INTRODUCCIÓN

Para trabajar en el plano necesitamos definir un sistema de referencia. Eso nos permitirá "localizar" puntos y rectas para, entre otras cosas, determinar posiciones entre ellas, realizar mediciones de distancias, ángulos, áreas, etc.

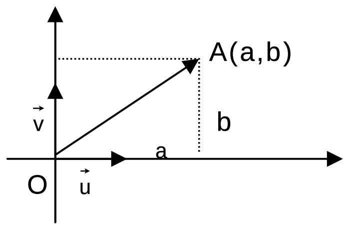
Definición: Se llama **sistema de referencia** en el plano, al conjunto $\{O, \vec{u}, \vec{v}\}$ formado por un punto fijo O del plano y una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vectores de dicho plano.

Sabemos que cualquier otro punto A del plano forma, con el punto fijado O, un vector $\overrightarrow{OA}$ que llamamos **vector de posición**, y que, por definición de base, se podrá escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; es decir, tendrá unas coordenadas en dicha base.

$$\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

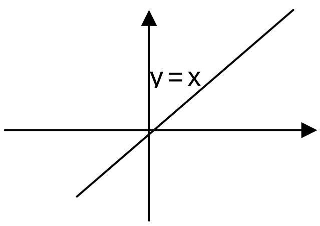
Definición: Llamamos **coordenadas** del punto A a las coordenadas de su vector de posición $\overrightarrow{OA}$, es decir, A(a,b).

Como ya indicamos en el tema anterior, las bases ortonormales, y en concreto la base canónica $B = \{(1,0), (0,1)\}$, son las más utilizadas por sus ventajas operativas.



2. ECUACIONES DE LA RECTA

Determinar una recta es conocer todos los puntos que la componen. Como es imposible escribirlos uno a uno por ser infinitos, se busca una característica común que cumplan ellos y ningún otro punto del plano. Por ejemplo: la bisectriz del primer cuadrante está formada por los puntos (x,y) de la forma (1,1), (3,3), (-2,-2), (4'7,4'7), (0,0) etc. es decir, todos los puntos de la recta tienen las dos coordenadas iguales (ningún otro punto del plano cumple esa condición) y podemos referirnos a ella genéricamente como **y = x**, ya que con ello, estaríamos describiendo todos sus puntos.

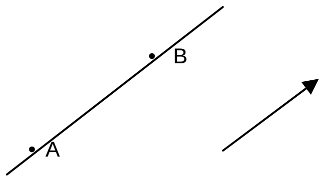


Has estudiado en cursos anteriores que $y = 3x-1$ es la ecuación de una recta. Esto significa que todos los puntos de **esa** recta cumplen la siguiente condición: que su segunda coordenada (ordenada) es el triple de la primera (abscisa) menos una unidad. Con ello, sabes que el punto (1,2) es de la recta (2 es el triple de 1 menos una unidad) y el punto (1,0) no lo es.

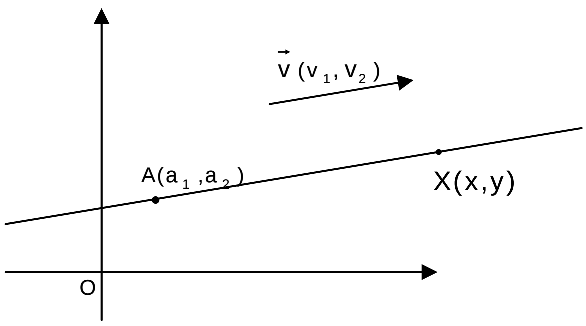
Eso te permite no sólo averiguar cualquier punto de la recta, sino reconocer si un punto dado pertenece o no a ella.

2.1 ECUACIÓN VECTORIAL

Sabemos también que una recta queda determinada por completo si conocemos dos de sus puntos o, lo que es lo mismo, si conocemos un solo punto y un vector de su misma dirección (utilizaremos así lo que hemos aprendido sobre vectores).

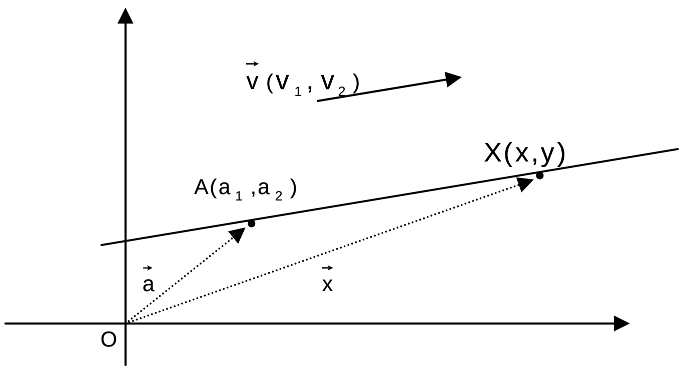


Supongamos que conocemos un punto A de la recta y un vector de su misma dirección $\vec{v}$. Consideramos un sistema de referencia $\{O, \vec{u}, \vec{v}\}$ respecto al cual, las coordenadas de A y $\vec{v}$ son $A(a_1, a_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$.



Para determinar la ecuación de la recta es necesario conocer la condición que cumplen todos sus puntos. Por ello, elegimos un punto X(x,y) cualquiera de la recta y observamos su comportamiento.

Si trazamos los vectores de posición de A y X y los llamamos $\vec{a}$ y $\vec{x}$ respectivamente, tendremos:



Observa que se verifica una suma de vectores $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$

Es evidente que el vector $\overrightarrow{AX}$ es siempre paralelo al vector $\vec{v}$, sea cual sea el punto elegido (X) de la recta. **Esa es la condición** que cumple cualquier punto de la recta y ninguno fuera de ella.

Por tanto, al ser $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{v}$ paralelos, se cumplirá que son proporcionales, es decir, existirá algún nº real t tal que $\overrightarrow{AX} = t\cdot\vec{v}$.

Si sustituimos en la igualdad $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$, obtenemos $\vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{v}$.
Y sabiendo que $\vec{x}(x,y)$, $\vec{a}(a_1, a_2)$, (por ser vectores de posición) y que $\vec{v}(v_1, v_2)$ tendremos finalmente:

$$(x\ ,\ y) = (a_1, a_2) + t\cdot(v_1, v_2) \quad \text{donde } t \in R$$

Esta expresión recibe el nombre de **ECUACIÓN VECTORIAL** de la recta.

El nº real t será uno u otro dependiendo de cual sea el punto X elegido. En el gráfico anterior, el punto X dibujado corresponderá a un valor de t=2 aproximadamente. Cuanto mayor sea t, más se aleja X por la derecha de A, y si t es negativo, obtendremos puntos X de la izquierda de A. (El propio punto A se obtendría para t =0).

Es lógico pensar que los infinitos valores de t posibles dan lugar, cada uno de ellos, a los infinitos puntos (x,y) de la recta.

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por A(1,2) y tiene la dirección del vector $\vec{v}(-1,5)$ es: $\mathbf{(x,y) = (1,2) + t(-1,5)} \quad \mathbf{t \in R}$

(x,y) simboliza cualquier punto de la recta. Si quieres obtener uno, sólo tienes que dar un valor a t. Por ejemplo, si t=3 , (x,y) = (-2,17) es un punto de la recta. Y (2,-3) es otro, correspondiente a t = -1.

Dibuja la recta y comprueba que estos puntos pertenecen a ella.
¿Es (-1,5) un punto de esta recta? Razónalo.

El punto A que aparece en la ecuación puede ser cualquiera de la recta, y el vector, cualquiera proporcional a $\vec{v}$, es decir, la ecuación:
(x,y) = (-2,17) + t·(-2,10) es la ecuación de la **misma** recta, aunque aparentemente parece la de otra recta distinta a la anterior.

2.2 ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Operando la ecuación vectorial obtendremos otras ecuaciones de la recta con formatos distintos.

$$(x,y) = (a_1, a_2) + t\cdot(v_1, v_2) \Rightarrow (x,y) = (a_1, a_2) + (t\cdot v_1, t\cdot v_2) \Rightarrow$$

$(x,y) = (a_1 + t\cdot v_1 \, , \, a_2 + t\cdot v_2) \Rightarrow$

Ecuaciones paramétricas

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + t\cdot v_1 \\ y = a_2 + t\cdot v_2 \end{cases} \quad t \in R}$$

Ejemplo : la recta del ejemplo anterior $(x,y) = (1,2) + t(-1,5)$ $t\in R$ se escribiría en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+5t \end{cases} \quad t\in R$$

Sus puntos se obtendrían igualmente dando valores a t.

Actividades

1.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P(3,1) y Q(-1,5). Obtén otros dos puntos de dicha recta.

2.- Halla m para que el punto A(-5,m) pertenezca a la recta r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

2.3 ECUACIÓN CONTINUA

Si ahora despejamos t en ambas ecuaciones paramétricas e igualamos los resultados, obtenemos:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\ t = \dfrac{y - a_2}{v_2} \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}}$$

Ecuación continua de la recta.

Ejemplo: siguiendo con el ejemplo anterior, la ecuación continua de la recta sería : $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 2}{5}$

Observa que t ha desaparecido pero, igualmente, esta expresión define la recta, pues todos sus puntos están expresados en ella a través de una condición a cumplir: " los puntos cuya primera coordenada menos una unidad partido de -1, sea igual que la quinta parte de la segunda coordenada menos dos unidades" son de esta recta.

Para calcular un punto basta dar a "x" un valor cualquiera, y despejar "y" (o al revés). Por ejemplo: si $x = 2 \Rightarrow \dfrac{2 - 1}{-1} = \dfrac{y - 2}{5} \Rightarrow -1 = \dfrac{y - 2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = -5 \Rightarrow y = -3$, luego (2,-3) es un punto de esta recta.

¿Lo es (1,-1)?

2.4 ECUACIÓN GENERAL

De la ecuación continua pasamos a la ecuación general sin más que multiplicar "en cruz".

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x-a_1)=v_1(y-a_2) \Rightarrow v_2\cdot x - v_2\cdot a_1 = v_1\cdot y - v_1\cdot a_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2\cdot x - v_1\cdot y + v_1\cdot a_2 - v_2\cdot a_1 = 0$$

Esta expresión incluye un término en x ($v_2\cdot x$), un término en y ($v_1\cdot y$) y un término independiente ($v_1\cdot a_2 - v_2\cdot a_1$).

Distinguiremos esto más claramente si llamamos A, B y C a dichos términos:

$$\boxed{A = v_2 \quad , \quad B = -v_1 \quad y \quad C = v_1\cdot a_2 - v_2\cdot a_1}$$

Entonces la ecuación queda expresada: $\boxed{\mathbf{Ax + By + C = 0}}$

Ecuación general de la recta.

Ejemplo: la ecuación continua anterior $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}$ se expresaría en forma general: $5x - 5 = -y + 2 \Rightarrow$ $\mathbf{5x + y - 7 = 0}$

A diferencia de las tres ecuaciones anteriores (vectorial, paramétricas y continua) en la ecuación general no son evidentes el punto y el vector director, pero se obtienen fácilmente.

El punto puede calcularse dando un valor cualquiera a x ó y. Por ejemplo: x=1, y sustituyendo en la igualdad: $5\cdot 1 + y - 7 = 0 \Rightarrow y = 2$. Punto (1,2).

El vector se obtiene recordando que en el paso anterior $A = v_2$ y $B = -v_1$, es decir, $v_1 = -B$ y $v_2 = A$. Como el vector es $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tendremos:

$$\boxed{\vec{v} = (-B,A) \quad \textbf{vector director de la recta}}$$

Ejemplo: Dada la recta de ecuación $3x+2y-1=0$, halla las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua.

Necesitamos un punto cualquiera y el vector director.

Punto: $x=1$, $3 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1$ A(1,-1)

Vector $\vec{v}(-B,A) = (-2,3)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (1,-1) + t(-2,3) \quad t \in R$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in R$

Ecuación continua $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}$

Una de las ventajas de la ecuación general es que no depende del punto y vector elegidos de la recta, es decir, cada recta tiene una **única** ecuación general.

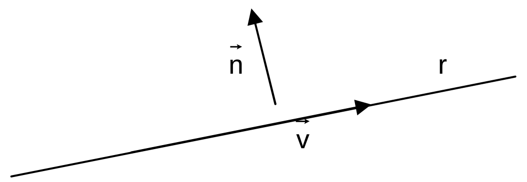
En el primer ejemplo de esta unidad, las expresiones:
$(x,y) = (1,2) + t(-1,5)$ y $(x,y) = (-2,17) + t\cdot(-2,10)$ eran dos ecuaciones distintas de la misma recta, pero si pasamos ambas a forma general,

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} \Rightarrow 5x - 5 = -y + 2 \Rightarrow 5x+y-7=0$$

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-17}{10} \Rightarrow 10x + 20 = -2y + 34 \Rightarrow 10x+2y-14 = 0 \Rightarrow 5x+y-7=0$$

Podemos sacar otra conclusión importante. Sabemos que la recta de ecuación $Ax+By+C=0$ tiene como vector director $\vec{v} = (-B,A)$. Si consideramos el vector $\vec{n} = (A,B)$ tendremos un **vector perpendicular** a la recta ya que el producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{n}$ es 0.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-B,A)\cdot(A,B) = -B\cdot A+A\cdot B = 0\ , \text{ luego } \vec{v} \perp \vec{n}$$



El vector $\vec{n}$ recibe el nombre de **vector normal o vector asociado** de la recta.

Vectores de la recta:

$\vec{v}$ = (-B,A) vector director (de su misma dirección)
$\vec{n}$ = (A,B) vector normal (dirección perpendicular)

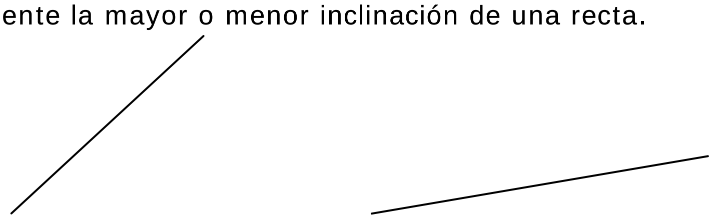
Actividad

3.- Halla la ecuación general de la recta $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

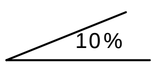
2.5 <u>ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE</u>

La siguiente ecuación que vamos a estudiar no depende de un punto y del vector director de la recta, sino de un punto y de la pendiente de dicha recta.

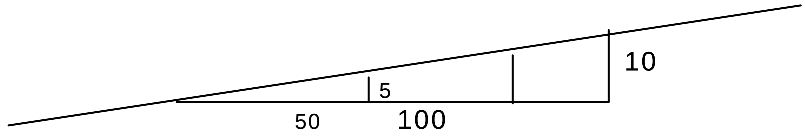
Vamos a introducir el concepto de pendiente (lo escribiremos m). Entendemos por pendiente la mayor o menor inclinación de una recta.



Estarás de acuerdo en que la primera recta dibujada tiene mayor pendiente que la segunda. Pero, ¿cómo cuantificar o medir dichas pendientes? Muy sencillo. Es posible que hayas visto alguna señal de tráfico donde se advierte del peligro de una pendiente prolongada.

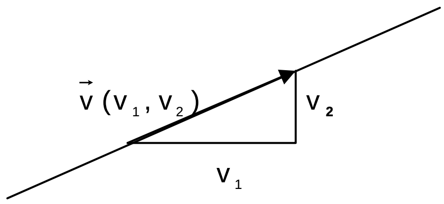


Una pendiente del 10 por ciento (o, mejor dicho, 10 por <u>cada</u> ciento) significa un desnivel de 10 m. por cada 100 m. de avance; es decir, cada vez que se avanza 100 m. se sube o baja 10.



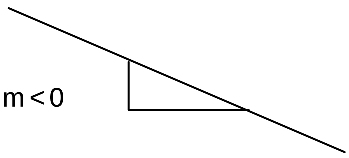
Como 10% = $\frac{10}{100}$ podemos definir la pendiente como la proporción entre lo que "se sube o baja" y lo que "se avanza", es decir, $m = \frac{10}{100} = 0'1$ en este caso. (Es evidente que no es necesario elegir un avance de 100 m. , pues por semejanza de triángulos la proporción se mantiene constante en cualquiera de ellos. Si avanzamos 50 m. subiremos 5 y $m = \frac{5}{50} = 0'1$ igualmente).

En general, como la pendiente de la recta depende de su dirección y ésta, a su vez, del vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$, podemos deducir que $m = \frac{v_2}{v_1}$ ya que:



$$\boxed{\mathbf{m = \frac{v_2}{v_1}}}$$

Las rectas inclinadas hacia la izquierda tendrán pendiente negativa, pues no se produce "avance" sino "retroceso".



Dicho esto, estamos en condiciones de definir la ecuación punto-pendiente de la recta, que procede de la ecuación continua al pasar v_2 multiplicando al otro miembro.

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}(x - a_1) = y - a_2 \Rightarrow m\cdot(x - a_1) = y - a_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{y - a_2 = m\cdot(x - a_1)}}$$ **Ecuación punto-pendiente**

En su expresión se observa que depende de m y de (a_1, a_2) que son la pendiente y un punto cualquiera de la recta.

¿Puedes conocer el vector director de una recta si tienes su pendiente? Piénsalo suponiendo que m = 2

Ejemplo: En los ejemplos anteriores se pide la recta que pasa por A(1,2) y tiene la dirección del vector $\vec{v}\,(-1,5)$.

Como $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{-1} = -5$ la ecuación punto-pendiente será:

$$y - 2 = -5(x - 1)$$

* Observa que si operas y pasas todo a un miembro, obtienes la ecuación general:

$$y - 2 = -5x + 5 \Rightarrow 5x + y - 7 = 0$$

Actividad

4.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta $5x - 3y + 8 = 0$. Escríbela también en forma vectorial, contínua, explícita y punto-pendiente.

2.6 ECUACIÓN EXPLÍCITA

Puede deducirse tanto de la ecuación general como de la punto-pendiente, sin más que despejar **y**.

$$y - a_2 = m\cdot(x - a_1) \Rightarrow y = m\cdot(x - a_1) + a_2 \Rightarrow y = mx - ma_1 + a_2$$

Como $(-ma_1 + a_2)$ es un término independiente, podemos referirnos a él llamándole b. De esta forma la ecuación quedaría:

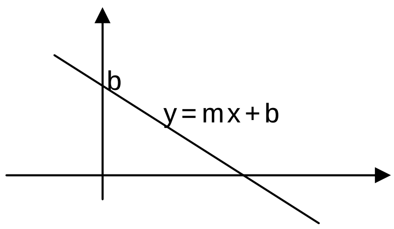
$\boxed{y = mx + b}$ **Ecuación explícita**

Queda a la vista que el coeficiente de x representará siempre la pendiente de la recta.

¿Qué representa b? Veámoslo.

Si damos a x el valor 0 (x=0) tendremos: $y = m\cdot 0 + b$, es decir si $x=0$, $y = b$. Eso significa que la recta pasa por el punto (0,b) que, por su forma, es un punto del eje Y.

Luego "b" (en realidad (0,b)) es el punto donde la recta corta al eje Y y recibe el nombre de **ordenada en el origen.**



Ejemplo: Si consideramos la ecuación general o punto- pendiente de los ejemplos anteriores, llegaremos a la explícita.

$$y - 2 = -5(x - 1) \Rightarrow y = -5x + 5 + 2 \Rightarrow y = -5x + 7$$

$$5x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -5x + 7$$

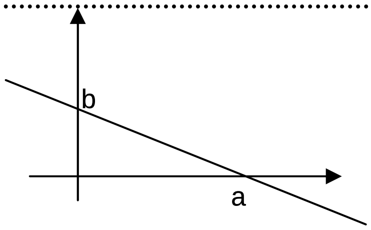
¿Podrías pasar de la ecuación explícita a las anteriores? Inténtalo con $y = -2x+1$

2.7 ECUACIÓN CANÓNICA O SEGMENTARIA

En esta ecuación lo que queda a la vista son los dos puntos de corte con los ejes, (a,0) y (0,b). Su formato es:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Comprueba que pasa por (a,0) y (0,b) sustituyéndolos en la ecuación.

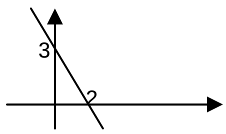


"a" se llama abscisa en el origen y

"b" ordenada en el origen, como ya sabes.

Ejemplo: Si conoces una recta en forma canónica es más fácil dibujarla, pues conoces directamente dos de sus puntos.

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ pasa por (2,0) y (0,3)



Para pasar de la canónica al resto de ecuaciones basta con operar su expresión.

$\frac{3x + 2y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$ ...

Estas siete formas distintas de dar una recta nos permiten encontrar la manera más cómoda de expresarla, según los datos que de ella dispongamos: punto y vector, pendiente, puntos de corte con los ejes, etc.

Es posible que de la recta conozcamos dos puntos A y B. En ese caso basta con darnos cuenta de que, en realidad, también disponemos de un punto y un vector puesto que, como punto, nos vale cualquiera de los dos, y como vector podemos utilizar el formado por los dos puntos: bien $\overrightarrow{AB}$, o bien, $\overrightarrow{BA}$.

Ejemplo: Ecuación de la recta formada por los puntos A(-1,3) y B(0,1).

Punto B(0,1)
Vector $\overrightarrow{AB} = (0-(-1), 1-3) = (1,-2)$

Ecuación continua (por ejemplo) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2}$

Comprueba que si hubieras elegido el punto A y el vector $\overrightarrow{BA}$, la ecuación general sería la misma.

¿Cómo sería la ecuación continua y general de una recta paralela al eje X?
¿y paralela al eje Y?
Piénsalo primero eligiendo una ecuación concreta y generalizando después.

Actividad

5. Hallar, en todas las formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,5) y es paralela al eje Y.

3. <u>POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS</u>

Sabemos que dos rectas en el plano sólo pueden ser: <u>secantes</u> en un punto, <u>paralelas o coincidentes.</u>

Sus respectivas ecuaciones forman un sistema $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$ cuya solución, es decir, el conjunto de puntos que satisface las dos ecuaciones a la vez, son sus puntos comunes (puntos de corte).

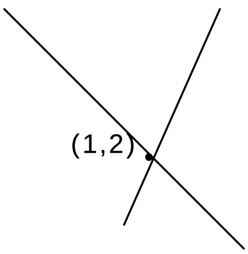
Podemos distinguir tres casos:

1) Si el sistema es <u>COMPATIBLE DETERMINADO</u> tendrá solución única. Lo que significa que las rectas son **secantes** en ese punto.

<u>Ejemplo:</u> $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ -3x - 3y + 9 = 0 \end{cases}$

$-4y+8=0 \Rightarrow y=2\ ;\ 3x-2-1=0 \Rightarrow x=1$

Solución: punto común a las dos rectas (1,2)



Si te fijas, dos rectas secantes deben tener direcciones distintas; es decir, sus vectores (-B,A) y (-B',A') **no** deben ser proporcionales,

luego debe cumplirse $\frac{-B}{-B'} \neq \frac{A}{A'}$ $\boxed{\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{RECTAS SECANTES} \Rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}}$$

En el ejemplo se observa claramente que $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1}$

2) Si el sistema es <u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u> tendrá infinitas soluciones; luego las rectas se cortarán en infinitos puntos, es decir, son **coincidentes.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} -x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 8 = 0 \\ 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$

$0=0$

(La segunda ecuación es la primera multiplicada por -2).
Si son coincidentes, las dos ecuaciones son iguales o proporcionales, es decir,

$$\text{COINCIDENTES} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

En el ejemplo $\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{4}{-8}$

3) Si el sistema es <u>INCOMPATIBLE</u> no hay solución; por tanto no habrá puntos de corte y las rectas serán **paralelas.**

Ejemplo:

$$\begin{cases} -x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 8 = 0 \\ 2x - 4y - 1 = 0 \end{cases}$$
$$7 = 0$$

Es claro que las rectas serán paralelas si sus vectores (-B,A) y (-B',A') son proporcionales, es decir, $\frac{-B}{-B'} = \frac{A}{A'} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

Sin embargo C y C' no deben cumplir esa proporción para evitar que sean coincidentes, luego:

$$\text{RECTAS PARALELAS} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

En el ejemplo $\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{4}{-1}$

***** *Añade una ecuación a $3x-y+2=0$ de modo que sea una recta*

a)secante a la dada b) paralela c) coincidente

Actividad

6.- Halla la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

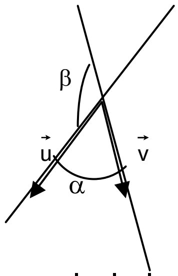
a) $2x-3y+1=0$, $-6x+9y-1=0$

b) $3x-y+4=0$, $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$

c) $3x+5y-4=0$, $6x+10y-8=0$

4. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Definición: Se entiende por ángulo entre dos rectas, el menor de los ángulos que forman sus vectores directores.



Es evidente que α tomará valores comprendidos entre 0º y 90º, es decir, $0º \leq \alpha \leq 90º$. Formarán 0º las rectas paralelas o coincidentes, y 90º las rectas perpendiculares.

Para calcularlo utilizaremos la expresión del ángulo entre dos vectores, con un pequeño matiz.

Sabemos que: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ pero, como desconocemos el sentido de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que determinan las rectas, es posible que no sea α el ángulo obtenido, sino su suplementario β.

En cualquier caso, por ser α y β ángulos suplementarios, la única diferencia al calcular su coseno sería el signo, pues los ángulos suplementarios tienen cosenos opuestos. Por ello, nos aseguraremos que el ángulo calculado es el menor (1er cuadrante) añadiendo a la fórmula un **valor absoluto**. (Lo haremos en el numerador pues el denominador ya es positivo por ser un producto de módulos).

Suponiendo que las rectas tengan por ecuaciones $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$ respectivamente, tendríamos $\vec{u} = (-B,A)$ y $\vec{v} = (-B',A')$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|(-B,A)\cdot(-B',A')|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}} = \frac{|(-B)(-B')+A\cdot A'|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|A\cdot A'+B\cdot B'|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}}}$$

Ejemplo: Calcula el ángulo formado por las rectas $3x+y-1=0$ y $-x+2y+5=0$

$$\cos\alpha = \frac{|3(-1)+1\cdot 2|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$$

En el caso particular de que las rectas fueran perpendiculares ($\alpha = 90º$), como $\cos 90º = 0$, debería cumplirse que $\dfrac{|A\cdot A'+B\cdot B'|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}} = 0$ lo que supone $|A\cdot A'+B\cdot B'| = 0 \Rightarrow A\cdot A'+B\cdot B' = 0$, es decir $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Actividades

7.- Halla el valor de m para que la recta $3x + my = 0$ forme un ángulo de 30º con el eje X.

8.- Halla el ángulo que forman las rectas r: $y = 2x-1$ s: $y = -x+2$.

5. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Condición de perpendicularidad de dos rectas: $\mathbf{A \cdot A' + B \cdot B' = 0}$.

Condición de paralelismo de dos rectas $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

¿Son perpendiculares $x-2y+3=0$ y $2x+y=0$?

Escribe una recta perpendicular y otra paralela a la recta $3x-2y+4=0$.

Veamos ahora una condición de paralelismo y perpendicularidad equivalente a las anteriores, pero que dependa no de los coeficientes de las rectas, sino de sus pendientes.

Supongamos dos rectas cualesquiera $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$ cuyos vectores son $\vec{u} = (-B,A)$ y $\vec{v} = (-B',A')$. Como $m = \frac{v_2}{v_1}$, las pendientes respectivas serían $m = -\frac{A}{B}$ y $m' = -\frac{A'}{B'}$

Si las rectas son paralelas es claro que tendrán la misma pendiente, es decir, **m=m'.**

Si son perpendiculares debe cumplirse que $A \cdot A'+B \cdot B'=0 \Rightarrow A \cdot A'=-B \cdot B'$
Y dividiendo toda la igualdad entre B·B' tendríamos:

$$\frac{A \cdot A'}{B \cdot B'} = -1 \Rightarrow \left(\frac{A}{B}\right)\cdot\left(\frac{A'}{B'}\right) = -1 \Rightarrow (-m)\cdot(-m') = -1 \Rightarrow \mathbf{m \cdot m' = -1}$$

$$\frac{A}{B} = -m$$

Condición de paralelismo	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ **o bien**	**m=m'**
Condición de perpendicularidad	**A·A'+B·B'=0 o bien**	**m·m'=-1**

Con estas condiciones es fácil distinguir si dos rectas son paralelas o perpendiculares sin más que mirar sus ecuaciones.

Podemos también escribir rectas paralelas o perpendiculares a una dada. Para ello sólo tendremos que usar, respectivamente, el vector director o el vector normal.

Actividades

9.- Dadas las rectas r: $ax + 3y + 2 = 0$ y s: $bx - 9y - 1 = 0$, hallar a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto P(2,0).

10.- Las ecuaciones de dos rectas son $3x+5y+3=0$ y $6x-my-1=0$. Halla m para que: **a)** las rectas sean paralelas
b) las rectas sean perpendiculares
c) las rectas sean secantes no perpendiculares
d) las rectas sean coincidentes
e) la segunda recta pase por (1,0).

6. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES A UNA DADA.

Para calcular una **recta paralela a una recta r** dada **por un punto** A, se mantiene el mismo vector de r, pues dos rectas paralelas tienen la misma dirección.

Ejemplo: Halla una recta paralela a r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5}$ por el punto A(-1,0).

La recta será: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{5}$.

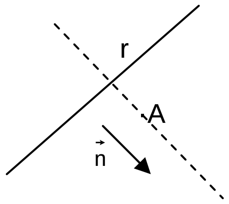
Si la recta inicial viene en forma general, mantener el vector es lo mismo que mantener los coeficientes de x e y (donde el vector está situado) y dejar libre C para calcularlo a través del punto A. Por ejemplo:

Recta paralela a $2x-y+3=0$ por el punto A(-1,3)

La recta será de la forma $2x-y+C=0$. Como A debe pertenecer a la recta, satisface su ecuación; es decir, $2(-1)-3+C=0 \Rightarrow -5+C=0 \Rightarrow C=5$

La recta solución es $2x-y+5=0$ que, por supuesto, es paralela a la dada.

Para calcular una **recta perpendicular** a una recta r dada **por un punto A**, se elige el vector normal de r como vector director de la recta buscada.



Ejemplo: *Halla la recta perpendicular a:*
r: $2x+3y-1=0$ por el punto A(-1,2).

Elegimos el vector normal $\vec{n} = (2,3)$ como vector director de la recta, pues es de su misma dirección, luego la recta buscada será:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x-2y+7=0$

Observa que ambas rectas son perpendiculares pues $2 \cdot 3+3(-2)=0$.

Si la recta viene dada en forma continua, por ejemplo $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3}$, su vector normal sería perpendicular a $\vec{v} = (4,3)$. Para obtenerlo, basta cambiar el orden de las componentes y a una de ellas de signo ($\vec{n} = (-3,4)$) pues con ello se consigue que el producto escalar de ambos vectores sea 0.

$$(4,3)\cdot(-3,4) = 4(-3)+3\cdot 4 = -12+12 = 0$$

De hecho (A,B) y (-B,A) siguen esa pauta.

Por tanto una recta perpendicular a la anterior por el punto (2,-1) tendría la forma: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}$

Actividades

11.- Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por A(5,-2) y es paralela a $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

b) Pasa por A(1,3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$

c) Es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ siendo P(0,4) y Q(-6,0), en su punto medio.

d) Es perpendicular a la recta $4x + 3y - 6 = 0$ en su punto de corte con el eje de abscisas.

e) Pasa por A(0,2) y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

12.- Dado el triángulo ABC donde A(-1,0) , B(2,1) y C(3,-1) halla las ecuaciones de: **a)** la altura que pasa por A

b) la mediana que parte de A

c) la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

13.- Calcula la proyección ortogonal* (o pie de la perpendicular) del punto P(3,1) a la recta $-2x+y+1 = 0$.

(*) se llama así al punto de corte de la recta dada con la perpendicular a ella por P.

14.- La recta $4x-3y=12$ es mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,0) y B. Hallar B y el ángulo que forman la mediatriz y el eje X.

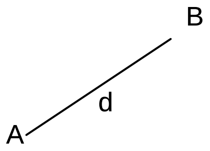
7. DISTANCIAS

El cálculo de distancias es posible gracias al producto escalar y al concepto de módulo de un vector, y nos permitirá resolver problemas de geometría en el plano (y en el espacio el próximo curso) relacionados con mediciones: longitudes, áreas, perímetros...

Estudiaremos las tres posibilidades: distancia punto-punto, punto-recta y recta-recta.

7.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Definición: se define la distancia entre dos puntos A y B, como el módulo del vector que forman $\overrightarrow{AB}$ (o $\overrightarrow{BA}$), es decir, si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ entonces:



$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)| = +\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Ejemplo: Halla la distancia entre los puntos A(-1,6) y B(0,3)

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(1,-3)| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \text{ unidades.}$$

¿Te das cuenta de que esto te permitiría, por ejemplo, calcular el perímetro de un triángulo o su base si conoces los tres vértices?

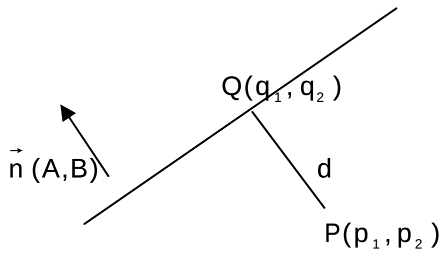
Actividad

15.- Halla el punto de la recta $3x-4y+8 = 0$ que equidista de A(-6,0) y B(0,-6).

7.2 DISTANCIA PUNTO-RECTA

Definición: Se entiende por distancia de un punto P a una recta r, la distancia mínima entre ellos, es decir, la que existe entre el punto A y su proyección ortogonal sobre la recta (Q)

(Se llama proyección ortogonal de un punto P sobre una recta al punto de corte entre dicha recta y la perpendicular a ella por el punto P).



Supongamos que la recta tiene por ecuación $Ax+By+C=0$ (su vector normal es $\vec{n}(A,B)$) y que los puntos P y Q tienen coordenadas respectivas $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$.

Sabemos que $d(P,r) = \mathbf{d} = |\overrightarrow{PQ}|$

Vamos a realizar el producto escalar de $\vec{n}$ y $\overrightarrow{QP}$ de las dos maneras que conocemos: la definición y la expresión analítica. Al igualar ambas expresiones podremos despejar el valor de d.

Por una parte se cumple que: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP} = (A,B)\cdot(p_1 - q_1, p_2 - q_2) =$

$A\cdot(p_1 - q_1) + B\cdot(p_2 - q_2) = A\cdot p_1 - A\cdot q_1 + B\cdot p_2 - B\cdot q_2 = A\cdot p_1 + B\cdot p_2 - (A\cdot q_1 + B\cdot q_2) =$

$= A\cdot p_1 + B\cdot p_2 - (-C) = A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C$

Como Q es un punto de la recta, satisface su ecuación, es decir, $Aq_1 + Bq_2 + C = 0 \Rightarrow Aq_1 + Bq_2 = -C$

Luego, por una parte $\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP} = A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C$

Por otra parte se cumple que: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP} = |\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{QP}|\cdot \cos\begin{cases}0º\\180º\end{cases} =$ $|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{QP}|\cdot(\pm 1) = \pm\sqrt{A^2+B^2}\cdot d$

Como ambas expresiones son iguales por serlo $\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}$, obtenemos:

$A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C = \pm\sqrt{A^2+B^2}\cdot d \Rightarrow d = \dfrac{A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ como desconocemos el signo final del cociente porque depende de los valores de A, B, C, p_1 etc. , y la distancia debe ser un valor positivo, necesitamos añadir un valor absoluto a la fórmula para que realmente responda al valor de una distancia, luego:

$$d = \left|\frac{A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Una vez en valor absoluto, es indistinto el signo del interior pues $|a| = |-a|$, luego podemos dejar el signo +.

Se deduce entonces que $$\boxed{\mathbf{d} = \left|\frac{\mathbf{A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C}}{\sqrt{\mathbf{A^2+B^2}}}\right|}$$

Ejemplo: Halla la distancia del punto A(-1,3) a la recta 2x-y-5=0

$$d = \left|\frac{2\cdot(-1) - 3 - 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{-10}{\sqrt{5}}\right| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ unidades.}$$

Como verás, para aplicar la fórmula es suficiente con sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta, dividir entre el módulo del vector normal y poner todo ello en valor absoluto. Su uso en los problemas es sencillo. Pero parece interesante, no sólo usarla, sino conocer su procedencia, “cómo” la hemos obtenido. ¿No te parece?

Averigua qué ocurriría en caso de que el punto del que se quiere hallar la distancia no fuera exterior, sino que estuviera contenido en la propia recta.

¿Te parece una fórmula útil para calcular la altura de un triángulo conociendo los vértices?(entre otras cosas)

Actividades

16.- Halla la distancia del punto P(5,-1) a las siguientes rectas:

a) $3x + 4y - 2 = 0$ **b)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3t \end{cases}$ **c)** $y = 5$

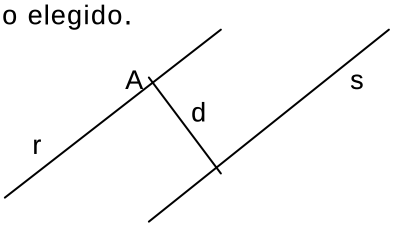
17.- Halla el valor (o valores) de c para que la distancia del punto A(6,2) a la recta $x-4y+c= 0$ sea $\sqrt{17}$ unidades.

18.- Halla un punto del eje de ordenadas que equidiste de las rectas $3x-4y=0$ y $4x+3y+2=0$.

7.3 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Estarás de acuerdo en que la distancia entre dos rectas coincidentes o secantes debe ser 0, puesto que siempre entendemos por distancia la mínima distancia.

Si son paralelas, bastará con elegir un punto cualquiera de una de ellas y calcular la distancia de ese punto a la otra recta, pues el resultado será independiente del punto elegido.



$d(r,s) = d(A,s)$ siendo $A \in r$

Ejemplo: Calcula la distancia entre las rectas r: $-x+3y+2=0$ y s: $2x-6y+1=0$

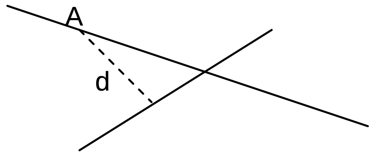
Comprobamos previamente que son paralelas: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{2}{1}$

$$d(r,s) \underset{\uparrow}{=} d(A,s) = \left|\frac{2\cdot 2 - 6\cdot 0 + 1}{\sqrt{4+36}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{40}}\right| = \frac{5\sqrt{40}}{40} = \frac{5\cdot 2\sqrt{10}}{40} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ u.}$$

Elegimos el punto $A(2,0) \in r$

Comprueba que la distancia sería la misma si eliges otro punto de r.

Si fueran secantes y eligiéramos un punto de una de ellas para calcular su distancia a la otra, nos daría una solución incorrecta, pues probablemente sería distinta de 0. (Sabemos que la distancia entre dos rectas secantes es 0)



Por eso es imprescindible comprobar de antemano la posición de las rectas antes de calcular la distancia entre ellas.

Actividad

19.- Halla la distancia entre las rectas **a)** r: x-3y+5 = 0 s: -2x+6y+1 = 0
b) r: 2x+y-3=0 s: x+y-3 = 0

8. LUGARES GEOMÉTRICOS

Definición: Se define lugar geométrico como el conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada. También puede entenderse como la figura que forman dichos puntos.

Por ejemplo: el conjunto de los puntos que distan 2 unidades del punto A(3,0) formaría una circunferencia de centro A y radio 2. Por eso diremos que el lugar geométrico de los puntos que distan 2 u. del punto A es una circunferencia de centro A y radio 2.

Es más, incluso podemos averiguar la ecuación de dicha circunferencia sin más que "obligar" a sus puntos P(x,y) a cumplir la condición.

Son de la circunferencia los puntos P(x,y) tales que: d(P,A) = 2 $\Rightarrow$ son puntos P(x,y) / $\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=2 \Rightarrow$ $\mathbf{(x-3)^2+y^2=4}$ (ecuación de la circunferencia).

Los puntos que la verifiquen (por ejemplo (1,0)) pertenecen a ella.

Si quieres, puedes desarrolarla: $x^2-6x+9+y^2=4 \Rightarrow$ $\mathbf{x^2+y^2-6x+5=0}$

Ambas son la misma ecuación.

En general, si quisieras hallar la **ecuación de una circunferencia** de centro C(a,b) y de radio r, podrías platearlo como un lugar geométrico:

Son puntos P(x,y) / d(P,C) = r $\Rightarrow$ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}}$$

Este procedimiento es válido para otros conceptos geométricos como mediatrices, bisectrices, elipses...

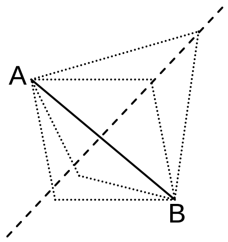
Actividades

20.- Halla el lugar geométrico de los puntos que distan 2 unidades de la recta 5x-y-3=0.

21.- Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A(-1,0) y B(2,3).

9. MEDIATRICES Y BISECTRICES

Definición: Se llama **mediatriz de un segmento** $\overline{AB}$ al lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos A y B.



Vamos a comprobar que dicho lugar geométrico es una recta perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio.

Supongamos que queremos hallar la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ siendo A(-1,2) y B(0,3).

Planteamos la condición que deben cumplir sus puntos: equidistar de los extremos.

Son puntos P(x,y) / d(P,A)=d(P,B) $\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = x^2+(y-3)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-4y+4 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2x-4y+5 = -6y+9 $\Rightarrow$ 2x+2y-4=0 $\Rightarrow$ **x+y-2=0** ecuación de la mediatriz

Es evidente que el lugar ha resultado ser una recta.

Comprueba que es perpendicular a $\overline{AB}$ *y que pasa por su punto medio.*

Visto esto, también puedes calcular la mediatriz haciendo la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio.

Comprueba, con el mismo segmento anterior, que se obtiene idéntico resultado.

Actividades

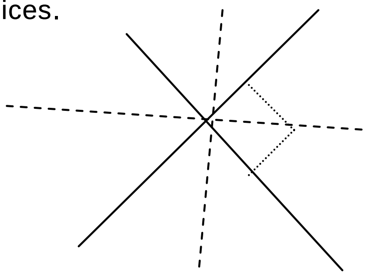
22.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ donde A(1,3) y B(5,-1).

23.- Halla la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ siendo A y B los puntos de corte con los ejes de la recta $4x - y + 8 = 0$.

24.- En el triángulo isósceles ABC, AB es el lado desigual siendo A(1,-2) y B(4,3). Hallar el vértice C sabiendo que está en la recta 3x-y+8=0.
Calcular también el área del triángulo.

Definición: Se llama **bisectriz** de dos rectas r y s al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas rectas.

De la propia definición se deduce que, si las rectas son secantes, habrá dos bisectrices.



Se observa, como consecuencia de la definición, que serán dos rectas que dividen los ángulos en dos partes iguales. Comprobaremos que eso es cierto, encontrando el lugar geométrico.

Supongamos que queremos hallar las bisectrices de las rectas r: 3x-4y+5=0 Y s: 4x-3y-2=0. Para ello, planteamos la condición que deben cumplir sus puntos: equidistar de ambas rectas.

Bisectrices: son puntos P(x,y) / d(P,r) = d(P,s) $\Rightarrow \left|\dfrac{3x-4y+5}{\sqrt{9+16}}\right| = \left|\dfrac{4x-3y-2}{\sqrt{16+9}}\right| \Rightarrow$

$$\dfrac{3x-4y+5}{5} = \dfrac{4x-3y-2}{5} \Rightarrow \mathbf{-x - y + 7 = 0}$$

$$\Rightarrow$$

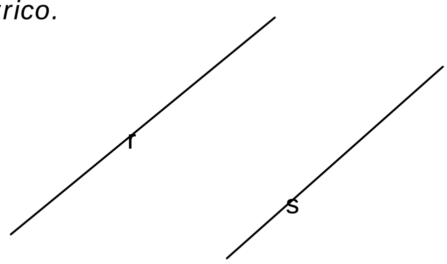
$$\dfrac{3x-4y+5}{5} = -\dfrac{4x-3y-2}{5} \Rightarrow \mathbf{7x - 7y + 3 = 0}$$

Dos cosas iguales en valor absoluto,
Sólo pueden ser iguales u opuestas.

Como ves, obtienes las ecuaciones de dos rectas.

Comprueba que son perpendiculares. ¿Crees que es casualidad o debe cumplirse que las bisectrices son perpendiculares? Razónalo.

Vamos a plantearnos qué ocurriría si las rectas fueran paralelas. Imagina primero gráficamente cómo deben ser las bisectrices, y confírmalo en el caso de las rectas $r: -x+3y+2=0$ y $s: -x+3y-4=0$ mediante el cálculo del lugar geométrico.



Actividades

25.- Halla las bisectrices de las rectas $r: 3x+4y=0$ y $s: 8x-6y+1=0$.

26.- Halla las bisectrices de los ejes coordenados.

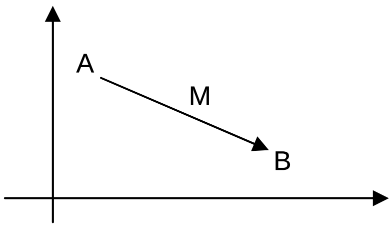
LA RECTA EN EL PLANO. EJERCICIOS Y CUESTIONES

1.- El punto P(5,-2) es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ del que conocemos A(2,3). Halla B.

NOTA: Dado el segmento $\overline{AB}$, se cumple que las coordenadas de su punto medio M son:

$$\boxed{M = \frac{A + B}{2}}$$

Intenta demostrarlo sabiendo que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



2.- Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que A(1,2), B(5,-1) y C(6,3).

3.- Determina k para que los puntos A(-3,5), B(2,1) y C(6,k) estén alineados.

4.- Completa el siguiente cuadro:

Ec. vectorial	Paramétricas	Contínua	General	Punto-Pendiente	Explícita	Canónica
(x,y)= (1,2)+t(-1,5)						
	X = -2+3t y = 4-t					
		$\frac{x+6}{-2} = \frac{y-1}{7}$				
			-x+4y+3=0			
				y+3=5(x-2)		
					y = -3x	
						$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

5.- Halla las ecuaciones paramétricas y generales de los ejes coordenados.

6.- De un triángulo ABC se conocen las ecuaciones de sus lados: AB: x + y = 0 AC: x + 2y -6 = 0 y BC: x – 2y = 0. Hallar:

a) los vértices A, B y C
b) el área y el perímetro del triángulo
c) Los ángulos del triángulo.

7.- Hallar un punto de la recta $y = 3x$ que diste $\sqrt{5}$ unidades de la recta $2x-y+1=0$. (Hay dos soluciones).

8.- Halla los puntos de la recta $x+y-2=0$ que equidistan de las rectas $2x-y=0$ y $4x+2y-1=0$.

9.- Halla el punto simétrico de $A(-1,2)$ respecto a la recta $y = -x+2$.

10.- Halla un punto de la recta $2x-4y+8=0$ que equidiste de los ejes coordenados.

11.- La recta $2x+y-4=0$ es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ donde $A(0,0)$. Hallar B.

12.- Un triángulo de área $8\ u^2$ tiene dos de sus vértices en los puntos A(1.-2) y B(2,3). Halla el tercer vértice C sabiendo que está en la recta $2x+y-2=0$.

13.- Halla la ecuación que cumplen los puntos que distan del origen 3 unidades. (lugar geométrico).

14.- Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $r: 2x-y+1=0$ y $s: x+2y-3=0$. ¿Qué nombre recibe?

15.- Halla las bisectrices de las rectas $r: 2x-y+5=0$ y $s: -4x+2y-1=0$

16.- Halla el valor de a para que la recta $ax+4y-5= 0$:
a) pase por el punto $(1,1)$
b) tenga pendiente $m=2$
c) uno de sus vectores sea $\vec{u} = (8,-2)$

17.- Halla el área de un cuadrado sabiendo que dos de sus lados están sobre las rectas $x-4y+1=0$ y $2x-8y+3=0$.

18.- Halla el punto simétrico de $P(3,-2)$ respecto a la recta $x+y-2=0$ y demuestra que ambos puntos distan lo mismo de la recta.

19.- Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a $4x+3y-3=0$ y que disten de ella 2 unidades.

20.- Un triángulo rectángulo en B tiene dos vértices en los puntos $A(3,0)$ y $C(1,3)$. Halla B sabiendo que pertenece a la recta $x - 3=0$.

21.- Sean A(0,8), B(6,0) y C(-2,-2) los vértices de un triángulo. Halla las ecuaciones de sus medianas.

22.- Determinar el área del paralelogramo OABC y las ecuaciones de los lados AB y BC sabiendo que OA está en la recta $x-2y=0$, OC en la recta $3x+y=0$ y que B es el punto B(3,5).

23.- Los puntos B(-1,3) y C(3,-3) son los vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta $x+2y-15=0$, siendo AB y AC los lados iguales. Calcular las coordenadas de A y las tres alturas del triángulo.

24.- Por el punto A(2,6) se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del primer y segundo cuadrantes. Hallar las ecuaciones de dichas rectas.
Halla también las coordenadas de los otros vértices del triángulo formado por dichas rectas y $3x-13y-8=0$.

25.- Coordenadas del punto simétrico del origen respecto a la recta $4x+3y=50$.

26.- Hallar m para que las rectas $mx+y=12$ y $4x-3y=m+1$ sean paralelas y hallar su distancia.

27.- Dados los puntos A(4,-2) y B(10,0) hallar el punto de la bisectriz del segundo cuadrante que equidista de los dos.

28.- Hallar el pie de la perpendicular (proyección ortogonal) trazada por el punto P(-1,2) a la recta $3x-5y-21=0$ y la distancia de dicho pie al punto en que esta recta corta al eje X.

29.- Ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,1) y forma 45º con la recta $2x-3y+2=0$

30.- Dados los puntos A(2,1), B(-3,5) y C(4,m) hallar m para que el triángulo ABC tenga 6 u^2 de área.

31.- Hallar las ecuaciones de las bisectrices del ángulo formado por las rectas $6x-8y+2=0$ y $-5x+12y-6=0$

32.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto A(-2,1) y distan 1 unidad del origen de coordenadas

CUESTIONES

1.- Las rectas de ecuaciones: $2x-3y+1=0$ $-3x-2y+3=0$

a) son paralelas
b) son perpendiculares
c) coinciden
d) se cortan oblicuamente

2.- Señala la afirmación FALSA: El triángulo de vértices A(-2,3), B(2,5) y C(4,1)

a) es rectángulo
b) es isósceles
c) tiene área 10
d) alguna de las afirmaciones anteriores es falsa.

3.- Las rectas r: $x+y=0$, s: $x-y=0$, t: $y-2=0$ ¿determinan un triángulo?

- **a)** no, porque r y s son paralelas
- **b)** no, porque r y t son paralelas
- **c)** sí, porque r y s son perpendiculares
- **d)** sí, porque no existe ningún paralelismo entre r, s y t

4.- Si con centro en el punto C(3,-1) se traza una circunferencia de radio $\sqrt{5}$, el punto P(1,0) está

- **a)** fuera del círculo determinado por la circunferencia
- **b)** en el interior del círculo
- **c)** en la circunferencia
- **d)** nada de lo anterior es cierto.

5.- Si tenemos todos los puntos cuya ordenada es el doble de su abscisa, ¿estarán alineados?

6.- Dada la recta de ecuación $x – 2 = 0$, contesta, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- **a)** Los puntos A(2,10) y B(2,-8) pertenecen a la recta
- **b)** El vector $\vec{u}(2,0)$ es el vector de la recta
- **c)** Los vectores de la forma (0,k) son vectores directores de la recta
- **d)** El punto (0,2) pertenece a la recta
- **e)** La recta $–x + 2 = 0$ es perpendicular a la dada

7.- Dada la recta de ecuación $Ax+By+C=0$, halla la condición que deben verificar A y B para que:

- **a)** La recta sea paralela al eje X
- **b)** La recta sea paralela al eje Y
- **c)** La recta sea perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.

8.- Sea A un punto de r y B un punto de r’, siendo r y r’ dos rectas paralelas. ¿Podemos afirmar que siempre se verifica la relación d(r,r’) = d(A,B)?

9.- Dadas dos rectas secantes ¿podemos afirmar que las bisectrices de los ángulos que forman dichas rectas son siempre perpendiculares?

10.- ¿Qué relación deben cumplir a y b para que las rectas $x–ay+2=0$ $bx+y-1=0$ sean: **a)** paralelas
b) perpendiculares

UNIDAD DIDÁCTICA 7

FUNCIONES y GRÁFICAS

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1.- Analizar si una gráfica es o no función.

2.- Analizar las características de una función (dominio, imagen, simetrías, monotonía, periodicidad, extremos absolutos y relativos, acotación y asíntotas) a partir de su gráfica.

3.- Calcular el dominio de una función a partir de su expresión analítica.

4.- Estudiar la simetría de una función a partir de su expresión analítica.

5.- Representar gráficamente funciones a partir de unas características dadas.

6.- Interpretar la evolución de un fenómeno asociado a su gráfica.

7.- Representar gráficamente y estudiar las características de las funciones elementales: polinómicas hasta 2º grado, racionales, $(x) = \frac{k}{x-a}$, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
(Trabajo en grupo)

8.- Operar con funciones dadas por su expresión analítica.

9.- Componer funciones dadas por su expresión analítica.

10.- Encontrar la función recíproca de otra dada.

CONCEPTOS:

1. Función: definición y expresión.
2. Dominio y recorrido de una función.
3. Acotación. Extremos absolutos y relativos.
4. Simetrías, periodicidad y monotonía (crecimiento y decrecimiento).
5. Funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
6. Funciones definidas a trozos.
7. Suma y producto de funciones.
8. Composición de funciones.
9. Función recíproca f^{-1}.

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. INTRODUCCIÓN

El término función fue usado por primera vez por el filósofo francés **René Descartes** en 1637. En 1694, el matemático alemán **Gottfried Wilhem Leibnitz** (1646-1716) utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Fue él, junto con **Isaac Newton**, quien comenzó a desarrollar el Cálculo Infinitesimal o de funciones. Sin embargo, el gran matemático de la Ilustración **Leonard Euler** (1707-1783) fue quien dio por primera vez una verdadera definición de función, al decir, de una manera un tanto vaga, que f(x) era el valor de la función f asociada al valor de x. (Suyo es el símbolo f(x)).

Aún así, el concepto de función que hoy en día todavía utilizamos es el fijado por el alemán **Peter Dirichlet** en 1829. Para él, una función real de variable real **f** es toda aplicación de un subconjunto **D** perteneciente a **R**, en el conjunto **R**, entendiéndose por aplicación una correspondencia que asocia a cada elemento de **D** un único elemento de **R**.

Para llegar a comprender esta definición necesitamos dar algún paso previo a través de ideas intuitivas.

Sabes que algunos conceptos pueden estar conectados entre sí a través de una relación de dependencia. Por ejemplo, el precio del billete de autobús según la distancia recorrida, el peso y la edad de un niño, el área de un círculo según su radio, etc. De hecho, en el lenguaje coloquial, se usa la palabra función para expresar esta dependencia: “El caudal de un río varía en función de la nieve y lluvia acumuladas”.

Las matemáticas permiten “cuantificar” esa dependencia, es decir, escribir con precisión cuál es la relación entre ambos conceptos, e incluso medirla.

Todo consiste en nombrar cada uno de los dos conceptos relacionados. Llamaremos a uno **x** y al otro **y.** Tendremos en cuenta que siempre hay uno de ellos que depende del valor del otro. Por ejemplo, el área del círculo depende del radio. Para seguir siempre la misma pauta, llamaremos **x** a la magnitud **independiente** (en este caso, el radio de la circunferencia) e **y** a la que **depende** de ella (área del círculo).

El esquema sería el siguiente: $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$

Radio $\longrightarrow$ Área círculo

Decir que el área está en función del radio puede abreviarse así, si cambiamos función por f: Área = f(radio)

O mejor, si escribimos cada concepto con su nombre **y = f(x)**

Como ya conocemos el área del círculo, podemos escribir $\mathbf{y = f(x) = \pi \cdot x^2}$

Es más, solemos cambiar x por la inicial de radio, para que la relación sea más evidente: $f(r) = \pi \cdot r^2$.

También encontrarás funciones de t (tiempo) f(t) , de l (lado) $f(l) = l^2$ área de un cuadrado, etc. Incluso funciones de más de una variable como $f(x,y) = 2x+2y$ perímetro de un rectángulo , $f(x,y,z) = x\cdot y\cdot z$ volumen de un ortoedro…

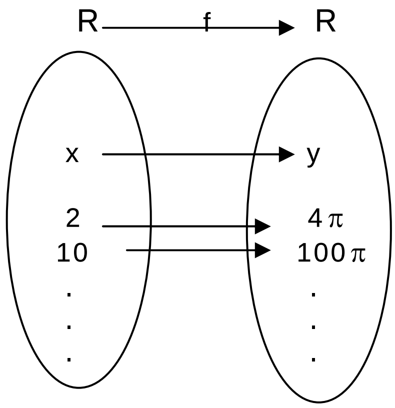
¿Y cuál es la ventaja de esta escritura? Que ya podemos calcular, volviendo al ejemplo anterior, el área de cualquier círculo sin más que sustituir su radio en la fórmula.

Si r = 2 unidades área = 4π unidades cuadradas.
Si r = 10 unidades área = 100π unidades cuadradas

Y así con cualquier otro valor.
¿Te das cuenta de que conocer la expresión de la función te permite saber, en todos los casos, cuál es con exactitud la relación de dependencia entre ambas variables? Cada vez que conoces una, puedes calcular la otra.

Es condición imprescindible para que sea función, que a cada valor de **x** le corresponda un único valor de **y**, pues no tendría sentido que un mismo radio diera lugar a dos círculos de áreas distintas, o que a una misma distancia recorrida se le adjudicaran dos billetes de precios distintos.

Si utilizamos conjuntos:



El primer conjunto se llamará **conjunto origen** y contendrá a todos los valores de la **variable independiente x** (en este caso todos los radios posibles). Como son números reales, diremos que la variable es real. Pero NO todas las funciones admiten TODOS los números reales. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$ no permitiría que **x** fuera negativo. Por eso, llamaremos **DOMINIO (D)** al conjunto origen , que será siempre un subconjunto de **R** ($\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$) (se admite que **R** es un subconjunto de sí mismo).

El segundo conjunto se llamará **conjunto imagen** y englobará a todos los valores de la **variable dependiente y** (todas las áreas posibles). Como serán también números reales, diremos que la función es real. Llamaremos **RECORRIDO o IMAGEN** al conjunto de n^{os} reales que son imagen de algún valor de **x**. Puede ser todo el conjunto **R** o sólo algún subconjunto suyo.
Por ejemplo: la función $f(x) = x^2$ tendría como recorrido sólo los reales positivos y el 0.

<u>Definición:</u>

LLamamos **APLICACIÓN** a cualquier correspondencia que se establezca entre dos conjuntos, de manera que a cada elemento del primer conjunto le asocia un único elemento del segundo conjunto

Como tanto **x** como **y** son números reales, se dice que **f** es una función real de variable real.

$$f: R \longrightarrow R$$

Igualmente, $f: N \longrightarrow Q$ es una función racional de variable natural. Y $f: Z \longrightarrow R$ es una función real de variable entera.

Ahora ya podemos entender la definición de **Dirichlet.**

2. DEFINICIÓN

Una función real de variable real f es toda aplicación de un subconjunto **D**$\subseteq$ **R** en **R**, de manera que a cada elemento de **D** le corresponde un único elemento de **R**. Se expresa:

$$\begin{aligned} f:\ D &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

o simplemente $y = f(x)$ donde **x** es la variable independiente e **y** es la variable dependiente.

El conjunto de todos los pares de puntos (x,f(x)) posibles, representados en el plano cartesiano, dará lugar a lo que se conoce como **gráfica** de la función, que viene a ser como una "fotografía" que permite visualizar el comportamiento de la función a través de sus características: puntos máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, regiones de existencia, etc.

Las funciones pueden venir dadas mediante una fórmula matemática, que se denomina **expresión analítica** (por ejemplo, $f(x) = 2x-1$), mediante una tabla de valores o mediante su gráfica.

Dentro del primer grupo se encuentran las funciones a trozos, que se caracterizan por contener varias expresiones matemáticas según el intervalo de que se trate.

Actividades

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x \le 1 \\ x^2 & 1 < x < 3 \\ 3 & x \ge 3 \end{cases}$ haz su representación gráfica teniendo en cuenta si los extremos están o no incluidos, poniendo punto cerrado o abierto respectivamente.

2. Representa la función $y = -3x+1$ en el intervalo $[1,5)$.

3. Representa las parábolas: a) $y = x^2-2x+3$ b) $y=\frac{1}{3}x^2-x+3$ en $(-1,3]$.

4. Asocia cada expresión analítica con su respectiva gráfica:

1) $y = -3x + 5$

2) $y = (x+2)^2$

3) $y = \log_{1/3} x$

4) $y = 3^x$

5) $y = -4x^2$

6) $y = \log_3 x$

7) $y = -\frac{5}{3}x - 1$

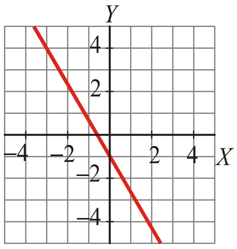
8) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

9) $y = \frac{1}{x+3}$

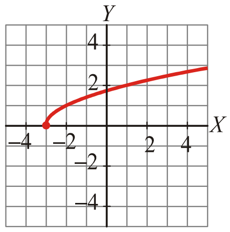
10) $y = \sqrt{3+x}$

11) $y = \frac{1}{x} + 3$

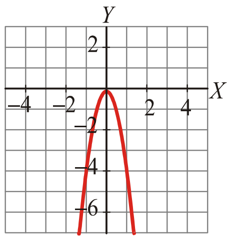
12) $y = \sqrt{3-x}$



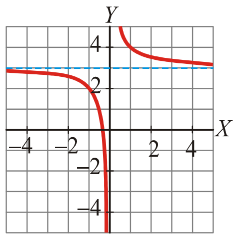
1.



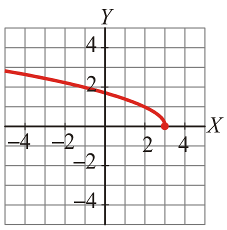
2.



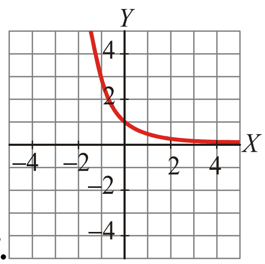
3.



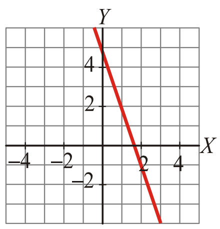
4.



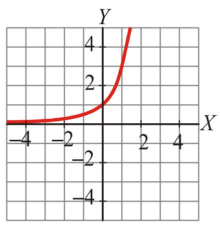
5.



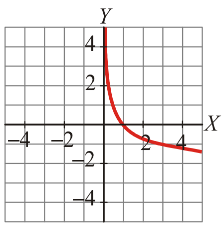
6.



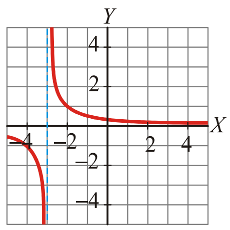
7.



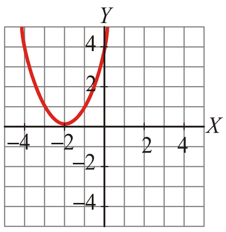
8.



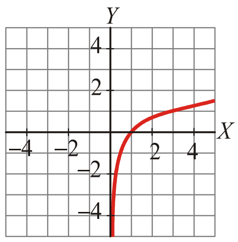
9.



10.



11.



12.

3. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Definición: Se llama **dominio,** al conjunto de valores de **x** para los que existe imagen mediante la función **f**. Se escribe **Dom(f).**

> *Ejemplo:* Si $f(x) = \frac{1}{x}$ Dom(f) = R- $\{0\}$
> puesto que no se puede dividir entre 0.

Para calcular el dominio de una función tendremos en cuenta que las operaciones que no tienen sentido con números reales son:

1. la división entre 0
2. las raíces de índice par de números negativos
3. los logaritmos de números negativos ó 0.

Por eso, cuando en una función aparezca alguna de estas operaciones "imposibles" deberemos "sacar" del dominio los números que las producen.

Ejemplo:

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ Por ser $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ el dominio será: Dom(f) = R - $\{\pm 2\}$

2. $g(x) = \sqrt{x-3}$ Debe cumplirse $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ luego $Dom(g) = [3, \infty)$

Esto significaría que la gráfica de la función sólo existe desde x=3 incluido, en adelante.

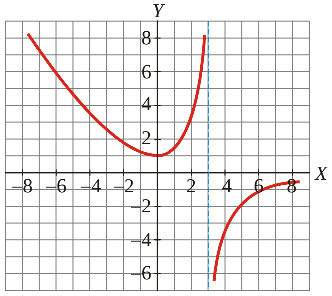
3. $h(x) = Ln(2x-1)$ no puede ser $2x-1 \leq 0$, luego quitaremos del dominio los x tales que $x \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, $Dom(h) = R - (-\infty, \frac{1}{2}]$, o lo que es lo mismo: $Dom(h) = (\frac{1}{2}, \infty)$.

Las funciones que no tengan denominadores, raíces de índice par o logaritmos, tendrán como dominio todos los números reales. Esto ocurre, por ejemplo, con las polinómicas.

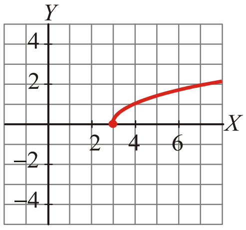
$$g(x) = 3x^3 - 2x + 6 \qquad Dom(g) = R$$

Si disponemos de la gráfica de la función, calcular el dominio es sencillo. Basta con "aplastar" mentalmente la gráfica sobre el eje X. De esta forma, estaríamos colocando cada imagen (**y**) sobre su origen (**x**) y tendríamos así señalados los **x** que tienen imagen, quedando huecos en los **x** que están fuera del dominio.

Ejemplos:



Dom(f) = R - $\{3\}$



Dom(f) = $[3, \infty)$

Actividad

5. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 5}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 4}{2x + 3}}$

c) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{4}x - \sqrt{5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 8}{5}$

e) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 1}$ **f)** $f(x) = \log(5x - 8)$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 2}}$ **h)** $f(x) = \sqrt{(1 - x)(x + 7)}$

i) $f(x) = \dfrac{5}{3x + 2} + \dfrac{x}{x - 2}$ **j)** $f(x) = \log(x^2 - 4)$

k) $f(x) = \log_3(x - 5)$ **l)** $f(x) = 5^{3x+1}$

Definición: Se llama **recorrido o imagen** al conjunto de todas las imágenes de la función **f**. Se escribe **Im(f).**

$$Im(f) = \{ f(x) \in R \;/\; x \in Dom(f) \}$$

Calcular el recorrido a través de la expresión analítica puede ser complicado, pero no lo es si disponemos de la gráfica. Bastaría con "aplastar" mentalmente la curva ahora sobre el eje Y.

Ejemplo: Sobre las mismas gráficas del ejemplo anterior, el recorrido de la primera sería:

$Im(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ o lo que es igual, $Im(f) = R - [0,1)$

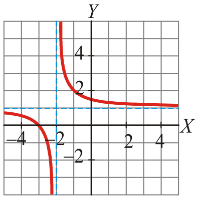
Y el de la segunda: $Im(f) = [0, \infty)$

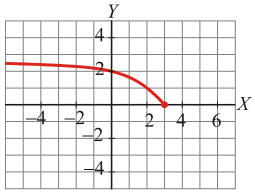
Actividades

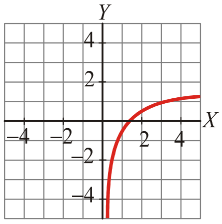
6. Relaciona cada función con su respectiva dominio de definición:

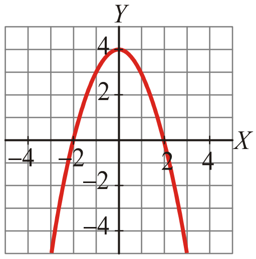
1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$	**1.** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
2) $y=\dfrac{2+x}{x^2}$	**2.** $R-\{-2\}$
3) $y=\sqrt{x-2}$	**3.** $R-\{3\}$
4) $y=\dfrac{1}{3x-x^2}$	**4.** $[-1,+\infty)$
5) $y=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$	**5.** $[-3,+\infty)$
6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$	**6.** $R-\{-3,+3\}$
7) $y=\sqrt{x^2-1}$	**7.** $R-\{0,\ 3\}$
8) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$	**8.** R
9) $y=\sqrt{3x-1}$	**9.** $[2,+\infty)$
10) $y=\dfrac{1}{x+2}$	**10.** $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
11) $y=\sqrt{x+1}$	**11.** $(2,+\infty)$
12) $y=\sqrt{x+3}$	**12.** $R-\{0\}$

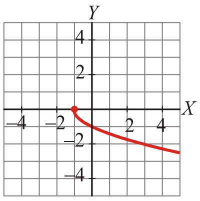
7. Relaciona cada gráfica con su recorrido:

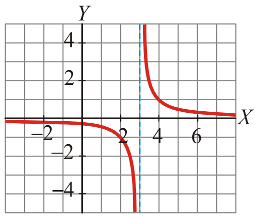
1) 

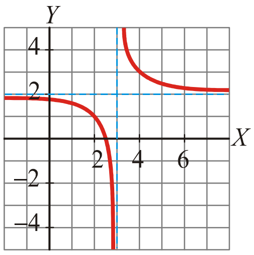
2) 

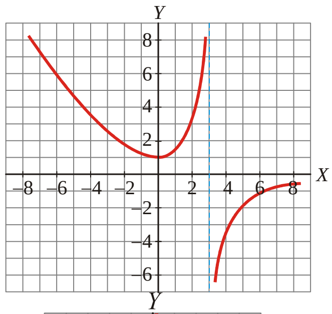
3) 

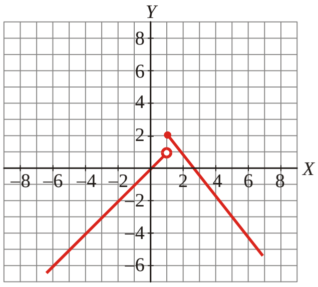
4) 

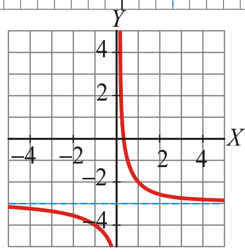
5) 

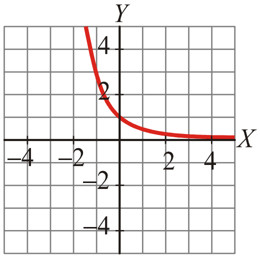
6) 

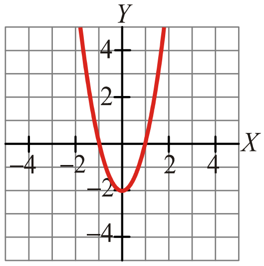
7) 

8) 

9) 

10) 

11) 

12) 

1. $(-\infty,2]$

2. $(-\infty,0]$

3. $R-\{1\}$

4. $(-\infty,4]$

5. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

6. $R-\{0\}$

7. $(-\infty,0)$

8. R

9. $R-\{2\}$

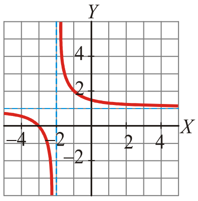
10. $R-\{-3\}$

11. $[0,+\infty)$

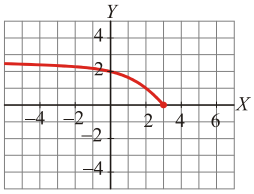
12. $[-2,+\infty)$

8. A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición:

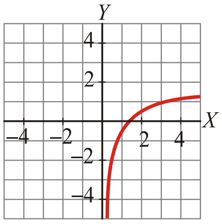
13)



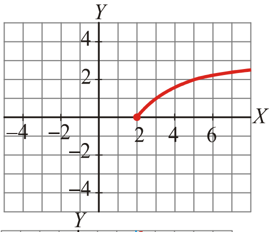
14)



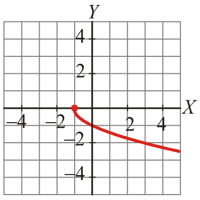
15)



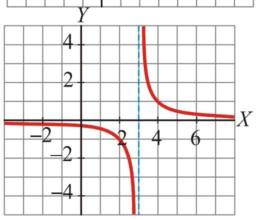
16)



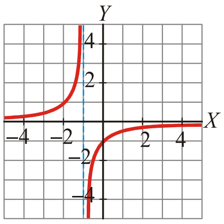
17)



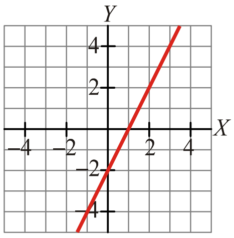
18)



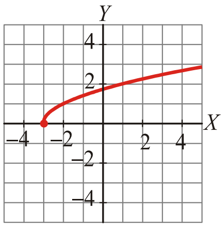
19)



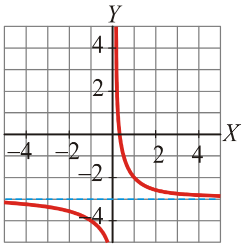
20)



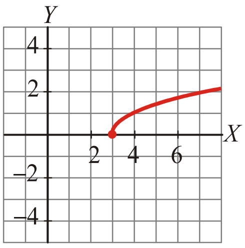
21)



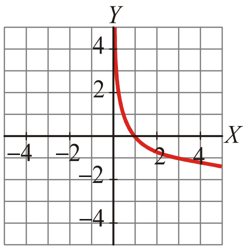
22)



23)



24)



13. R

14. $R-\{3\}$

15. $R-\{0\}$

16. $[2,+\infty)$

17. $[3,+\infty)$

18. $(0,+\infty)$

19. $(-\infty.3]$

20. $(0,+\infty)$

21. $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

22. $R-\{-1\}$

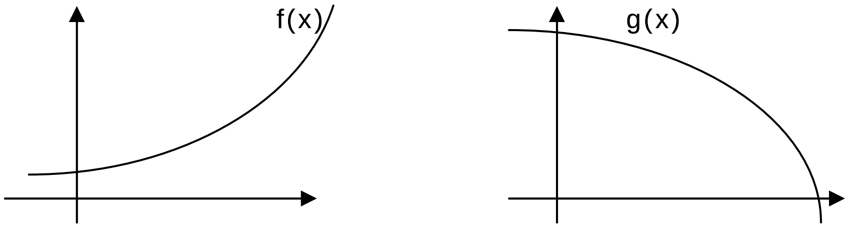
23. $[-3,+\infty)$

24. $[-1,+\infty)$

4. MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

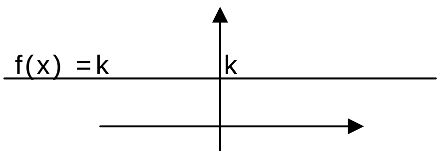
Si dispones de la gráfica de una función y te planteas dónde crece, probablemente asocies crecer con subir.

Efectivamente, una función es **creciente** si, al aumentar la variable **x**, también aumenta la variable **y**. Y es **decreciente** en caso contrario: si al aumentar las **x** disminuyen las **y**.

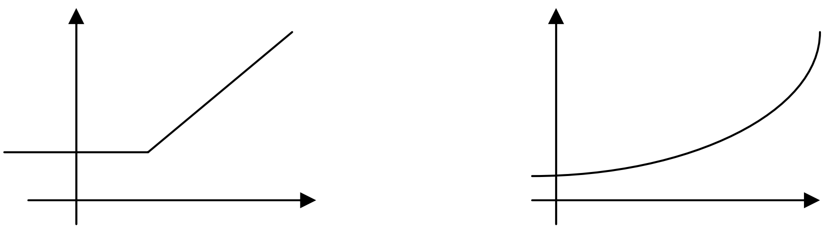


Creciente Decreciente

Si no aclaramos mejor este concepto, quedarían indefinidas las funciones constantes; pues en ellas los valores de **y** no crecen ni decrecen.



Por eso es necesario desdoblar cada concepto. Distinguiremos entre crecimiento y crecimiento estricto, englobando en el primer caso tanto la idea de crecer como la de “no decrecer”.



Crecimiento Crecimiento estricto

Como la función puede cambiar de crecimiento a lo largo de su dominio, haremos las definiciones en un punto, entendiéndose por punto, en realidad, un pequeño entorno suyo.

Definición:

Una función f(x) es **estrictamente creciente** en un punto **x=a**, si en un entorno de **a** (a-r , a+r) se cumple:

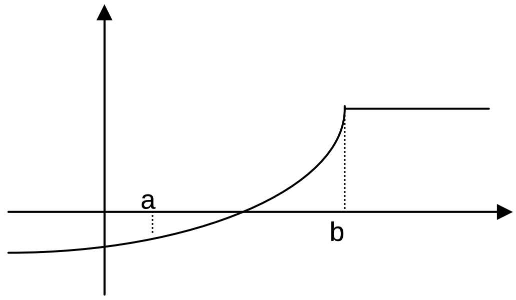
$$\forall \; x_1, x_2 \in (a-r \, , \, a+r) \;\; \text{si} \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

es decir, dentro del entorno los x menores tienen las imágenes más pequeñas. Luego al crecer las x crecen las f(x).

Si permitimos que las imágenes sean iguales, incluiremos a las funciones constantes.

Definición:

Una función es **creciente** en un punto **x=a** si en un entorno de **a** E(a,r) se cumple: $\forall\ x_1, x_2 \in (a-r\ ,\ a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



En **x=a** la función es estrictamente creciente y en **x=b** es creciente.

Señala más puntos donde la función sea creciente a secas y otros donde lo sea estrictamente.

Haremos definiciones paralelas para el decrecimiento.

Definición:

Una función es **estrictamente decreciente** en un punto **x=a** si en un entorno de **a** (a-r , a+r) se cumple: $\forall\ x_1, x_2 \in (a-r\ ,\ a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

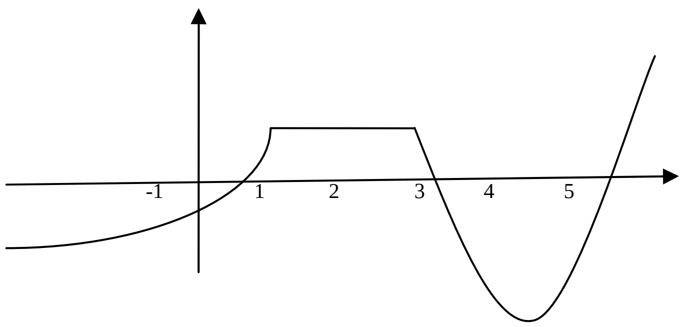
Una función es **decreciente** en un punto **x=a** si en un entorno de **a** se cumple: $\forall\ x_1, x_2 \in (a-r\ ,\ a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez, puesto que verifican ambas definiciones.

Una función será creciente o decreciente en un intervalo si lo es en cada punto de dicho intervalo.

Razona si es cierto que estrictamente creciente ⇒ creciente o es cierto su contrario.

Ejemplo:



Es estrictamente creciente en $(-\infty\ ,\ 1) \cup (4'5,\ +\infty)$. Estrictamente decreciente en (3, 4’5) y creciente y decreciente en (1,3).

¿Cómo es en los puntos x= -1, x=1, x=2, x=3, x=4 y x=4’5?

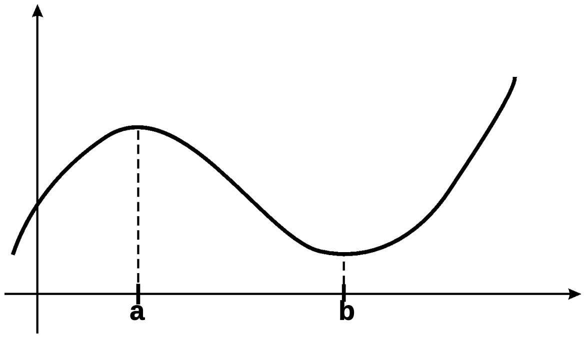
5. EXTREMOS

5.1 Máximo relativo

Definición: Una función f(x) alcanza un **máximo relativo** en **x = a** si su imagen f(a) es el mayor valor que toma la función en un entorno de **a**, es decir, si existe un entorno de **a** tal que: $\forall\, x \in E(a,r),\ f(x) < f(a)$.

5.2 Mínimo relativo

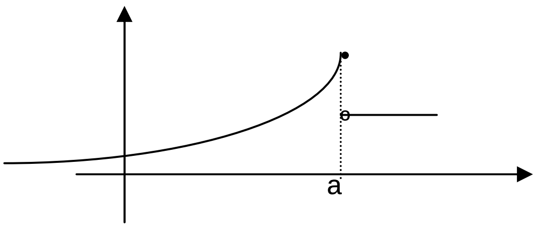
Definición: Una función f(x) alcanza un **mínimo relativo** en **x = a** si su imagen f(a) es el menor valor que toma la función en un entorno de **a**, es decir, si existe un entorno de **a** tal que: $\forall\, x \in E(a,r),\ f(x) > f(a)$



a es un máximo relativo

b es un mínimo relativo

Si f(x) es continua, los máximos relativos son los puntos donde la función pasa de ser creciente a decreciente, y viceversa para los mínimos relativos.
Si la función no es continua no tiene por qué ser cierto.



5.3 Máximo absoluto

Una función f(x) alcanza un **máximo absoluto** en **x = a** si f(a) es el mayor valor que toma la función en todo su dominio.

5.4 Mínimo absoluto

Una función f(x) alcanza un **mínimo absoluto** en **x = a** si f(a) es el menor valor que toma la función en todo su dominio.

Los máximos y mínimos se conocen con el nombre genérico de extremos.

Lógicamente, los extremos absolutos son también extremos relativos. Pues si f(a) es el mayor o menor valor que toma la función en todo su dominio, también lo será en un entorno de x=a.

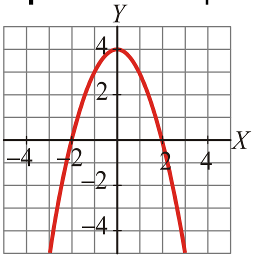
Por tanto, bajo el nombre genérico de extremos relativos incluimos a todos los extremos.

6. ACOTACIÓN

6.1 Función acotada superiormente

Una función f(x) está **acotada superiormente** si todas las imágenes son menores o iguales que un nº real; es decir, si y sólo si $\exists\ k \in R$ tal que $f(x) \leq k$, $\forall x \in Dom(f)$.

K se llama **cota superior**. Cualquier nº $L \geq k$ también será cota superior.

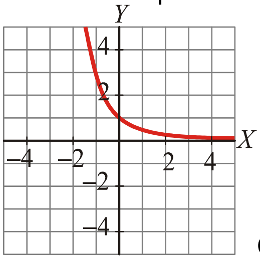


Cualquier nº ≥ 4 es una cota superior.

6.2 Función acotada inferiormente

Una función f(x) está **acotada inferiormente** si y sólo si $\exists\ k' \in R$ tal que $f(x) \geq k'$, $\forall x \in Dom(f)$, es decir si todas la imágenes son mayores o iguales que un nº real.

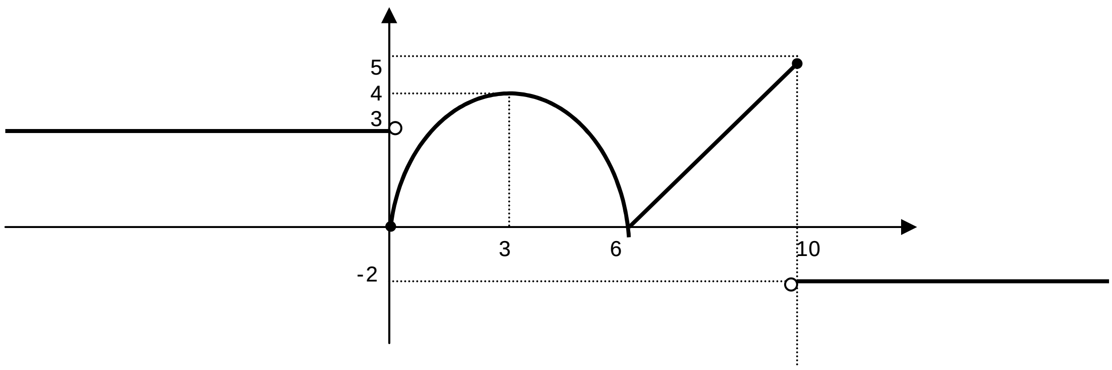
k' se llama **cota inferior.** Cualquier nº $N \leq k'$ también será cota inferior.



Cualquier nº ≤ 0 es una cota inferior.

Se dice que una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Gráficamente, si la función es acotada está contenida por completo en una banda horizontal.

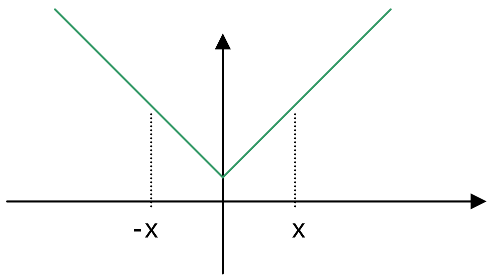


7. SIMETRÍA

Las funciones pueden presentar dos tipos de simetrías:

7.1 SIMETRÍA PAR

Se llaman así las funciones **simétricas respecto al eje Y.**

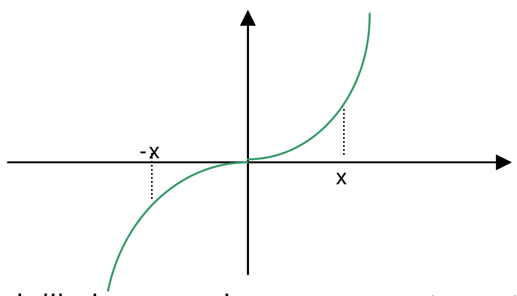


Como verás, se verifica que cada **x** y su opuesto **–x** tienen la misma imagen. Luego f(x) es una **función par** si $\boxed{f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in \text{Dom}(f)}$

Ejemplo:	$f(x) = x^4 - 3x^2$ es una función par, pues si calculas f(-x) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$

7.2 SIMETRÍA IMPAR

Se llaman así a las funciones **simétricas respecto al origen de coordenadas,** es decir, respecto a los dos ejes coordenados simultáneamente.



Se observa en el dibujo que cada **x** y su opuesto **–x** tienen imágenes opuestas, es decir, $\boxed{f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f).}$

Ejemplo:	$f(x) = \frac{1}{x}$ es una función impar ya que si calculamos f(-x) $f(-x) = -\frac{1}{x}$ y, si lo cambiamos de signo: $-f(-x) = -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = f(x)$

a) Una función no puede ser simétrica respecto al eje X, pues para poder serlo cada punto debería tener dos imágenes, lo que contradice la definición de función.

Compruébalo dibujando una función simétrica respecto al eje X.

b) Pueden existir otros ejes o puntos de simetría en una función y, de igual forma, no tiene por qué presentar ningún tipo de simetría.

Actividad

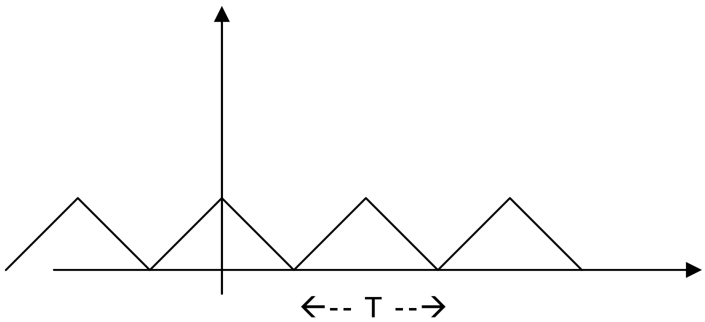
9. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^6 - x^4$ **b)** $g(x) = |x|$ **c)** $h(x) = x \cdot e^{x^2}$

8. PERIODICIDAD

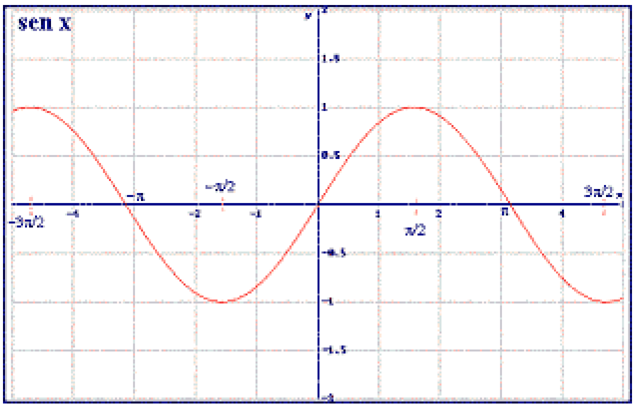
Una función es **periódica de periodo T** si se repite idénticamente en cada intervalo de amplitud T, es decir, si T es el menor número real que cumple:

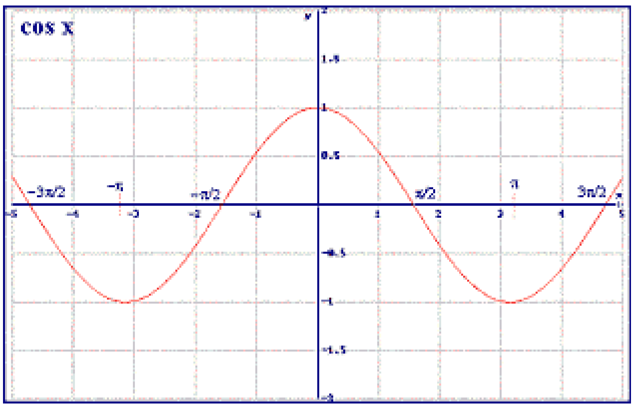
$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x+nT) \quad \forall x \in Dom(f).$$

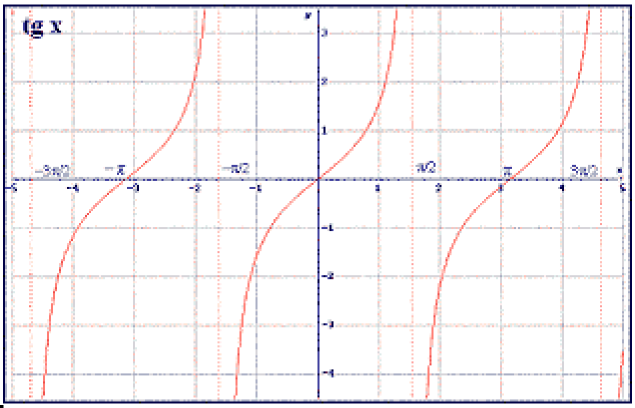


Las funciones periódicas más conocidas son las trigonométricas, siendo $T=2\pi$ en el caso de $y = \text{sen}x$ e $y = \cos x$.

La función $y = \text{tg}x$ tiene período $T = \pi$.

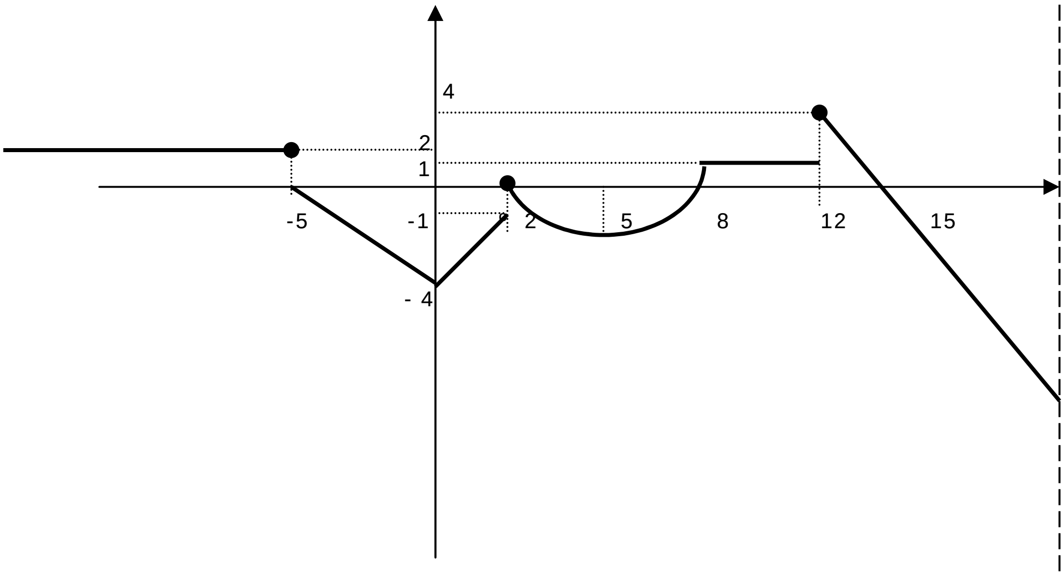


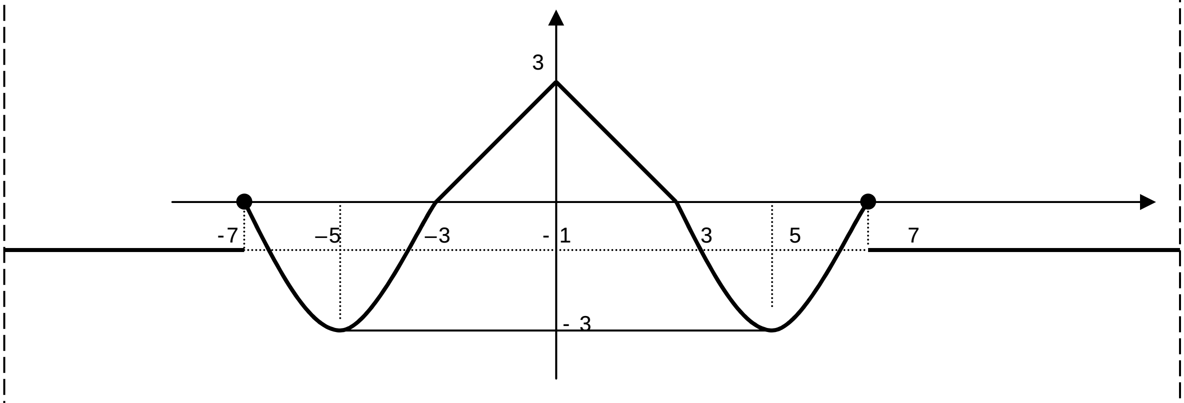




Actividad

10. Analiza las siguientes funciones





9. OPERACIONES CON FUNCIONES

10.1 SUMA Y RESTA DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, podremos generar una tercera función que llamaremos f+g a partir de la suma de ambas.

Definición:

Dadas dos funciones f(x) y g(x), llamamos **suma** de f y g a otra función **f+g** tal que:

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x)+g(x)}$$

es decir, definimos la función suma como la suma de las funciones.

El dominio de la suma es la intersección de los dominios, ya que para poder hallar (f+g)(a) es necesario calcular f(a) y g(a). Luego a debe pertenecer al dominio de ambas funciones.

Ejemplo: $f(x) = 3x^3 + x$

$g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ entonces $(f+g)(x) = 3x^3 + x + \dfrac{2x}{x+2}$

Como Dom(f) = R y Dom(g) = R - $\{-2\}$, entonces Dom(f+g) = R - $\{-2\}$

** Si los dominios respectivos son disjuntos (no tienen elementos comunes) no existe la función suma.

Escribe dos funciones cuya función suma no exista.

Definición:

Se llama **función nula** a **f(x)=0**. Es el elemento neutro para la suma de funciones, ya que g(x) + 0 = g(x).

Gráficamente, coincide con el eje X.

Definición:

Se llama **función opuesta de f** y se escribe –f a la función $\boxed{(-f)(x)=-f(x)}$

La gráfica de la función opuesta es simétrica de la de la función f respecto al eje X.

Ejemplo: $f(x) = x^2$ $(-f)(x) = -x^2$

Dibuja ambas gráficas y comprueba su simetría.

Definición:

Dadas dos funciones f(x) y g(x) llamamos **resta** de f y g a otra función **f-g** tal que:

$$\boxed{(f\text{-}g)(x) = f(x)\text{-}g(x).}$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 5, \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f - g)(x) = x^2 + 5 - \frac{1}{x}$$

10.2 PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES

Definición:

Dadas dos funciones f y g, llamamos **producto** de f y g a otra función **f·g** definida de la forma:

$$\boxed{(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).}$$

Igualmente, sólo existirá función producto en los puntos que pertenezcan tanto al dominio de f como al de g, es decir, $Dom(f\cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

Ejemplo:

$$f(x)= 3x-1 \;, \quad g(x) = \frac{2x}{x+3} \quad \Rightarrow \quad (f\cdot g)(x) = \frac{6x^2 - 2x}{x+3}$$

Definición:

Se llama **función unidad** a **f(x)=1**. Es el elemento neutro para el producto de funciones.

Definición:

Se llama **función inversa** de f y se escribe $\mathbf{\frac{1}{f}}$ a la función:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}}$$

El dominio de $\frac{1}{f}$ es: $Dom(\frac{1}{f})=Dom(f)-\{x/f(x)=0\}$, ya que los **x** que anulan el denominador (f en este caso), no tienen imagen.

Ejemplo: si $f(x) = \sqrt{x+1}$ entonces $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$Dom(f) = [-1, \infty) \quad y \quad Dom\left(\frac{1}{f}\right) = (-1, \infty)$$

Definición:

Dadas dos funciones f y g, llamamos **cociente** de f y g a otra función **f/g** tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de f/g es: Dom(f/g) = Dom(f)$\cap$Dom(g) - {x/g(x)=0}, es decir, pertenecen al dominio de f/g los **x** que pertenecen al dominio de ambas funciones y que no anulan el denominador.

Ejemplo:

1. si f(x) = 3x+2 y g(x) = x –1 , entonces: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

2. si $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 2 \\ 4x & x > 2 \end{cases}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x}} & x \le 2 \\ \frac{4x}{\sqrt{x}} & x > 2 \end{cases}$$

Calcula el dominio de f/g en ambos casos.

Actividades

11. Sean f(x) = 2x-1 y $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Calcula:

a. (f + g)(2)
b. Dom(f - g)

12. Sean $f(x) = \frac{x}{3} - 2$ y $g(x)= 2x^2+3$. Calcula:

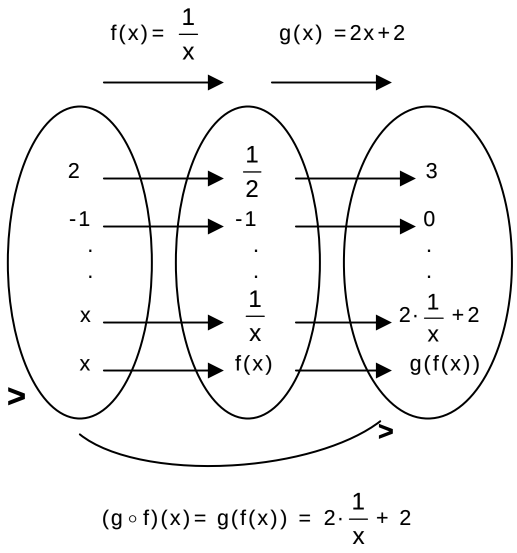
a. (f – g)(x), (f – g)(2)
b. (f·g)(x), (f·g)(- 1)
c. (f /g)(x), (f /g)(- 2)

9.3 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Además de sumar, restar, multiplicar y dividir funciones, podemos realizar una nueva operación entre ellas que llamaremos composición.

Intuitivamente, componer funciones vendría a ser algo parecido a "fusionarlas". Es decir, consistiría en realizar en un solo paso lo que ambas por separado harían en dos.

Supón que dispones de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x+1$



El gráfico te permite "visualizar" el efecto de la función composición: realizar en un solo paso lo que por separado harían f y g en dos.
Por ejemplo: f asocia 2 con 1/2 y g asocia 1/2 con 3. La función composición, que llamaremos $g\circ f$, asocia directamente 2 con 3.

Definición:

Dadas dos funciones f y g, llamamos **función compuesta de f y g,** y escribimos $g\circ f$, a la función:

$$\boxed{(g\circ f)(x) = g(f(x))}$$

Se escribe $g\circ f$, a pesar de que actúan en orden contrario, primero f y luego g. Ello se debe a que resulta más operativo que el orden coincida con el del 2º miembro g(f(x)). Sin embargo, se lee " f compuesto con g".

Ejemplo:

Dadas las funciones: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ y $g(x) = 3x+2$

"g compuesto con f" $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = \frac{\sqrt{3x+2}}{3x+2-1} = \frac{\sqrt{3x+2}}{3x+1}$

"f compuesto con g" $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{x}}{x-1}+2$

Has podido observar en el ejemplo anterior que la composición de funciones **NO** cumple la propiedad **conmutativa**. Pero sí se verifica la propiedad **asociativa:** $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.

Compruébalo con un ejemplo.

Definición:

Se llama **función identidad** a **$f(x) = x$.**
Es el elemento neutro de la composición, ya que si $f(x) = x$ y $g(x)$ es otra función cualquiera, se cumple que $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$

Actividades

13. Si $f(x)= 2x^2 - x +1$ y $g(x)= x+1$ halla $f\circ g$ y $g(f(x))$.

14. Si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2x+3$, halla $f\circ g$, $g\circ g$, $f\circ f$ y $g\circ f$.

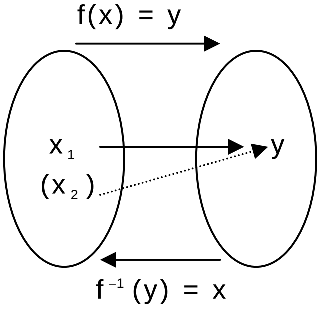
10. FUNCIÓN RECÍPROCA

De manera intuitiva, llamaremos función recíproca de una función f , y escribiremos $\mathbf{f^{-1}}$, a aquella que "deshace" lo que hace f. Es decir, si **f** asocia **x** con su imagen **y** , $\mathbf{f^{-1}}$ asociará cada **y** con la que fue su **x.**
Por esa razón, si $f(x) = 3x$ entonces $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$. Observa que si $f(2) = 6$, entonces $f^{-1}(6) = \frac{6}{3} = 2$. En general:

Definición:

Dada una función f(x) inyectiva*, se llama **función recíproca** de f, y se escribe $\mathbf{f^{-1}}$, a la función que cumple:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x}$$



(*) Para que exista $\mathbf{f^{-1}}$ es necesario que **f** sea función, es decir, que cada **y** tenga una sola imagen **x.** Para ello, es imprescindible que la función f asocie cada **x** con una imagen distinta **y**. Es decir, que f sea **inyectiva.**

Dicho de otra manera, no puede haber dos orígenes distintos x_1 y x_2 que tengan la misma imagen, porque si ocurriera eso, f^{-1} no sería función, ya que "y" debería tener dos imágenes distintas: x_1 y x_2.

Definición:

Se dice que una función f es **inyectiva** si a orígenes distintos les corresponden imágenes distintas. Es decir, si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o lo que es lo mismo,

$$\boxed{\text{f inyectiva si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Si hubiera dos imágenes iguales, sólo podrían proceder de un mismo origen.

Ejemplo:

Hallar la función recíproca de $f(x) = 3x-1$

Comprobamos primero que la función es inyectiva, es decir, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$f(x_1) = 3\cdot x_1 - 1$

$f(x_2) = 3\cdot x_2 - 1$ igualando: $3\cdot x_1 - 1 = 3\cdot x_2 - 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ luego sí es inyectiva y existe la función recíproca.

Para hallar ahora f^{-1} seguiremos la definición: $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

1. Primero igualamos f(x) con y: $3x-1 = y$
2. Despejamos x: $3x = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$
3. Igualamos $f^{-1}(y)$ con x: $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$
4. Finalmente, cambiamos y por x puesto que es indistinto.

Podemos comprobar que es correcto sustituyendo un punto cualquiera.

$f(2) = 3\cdot 2-1 = 5$ luego $f^{-1}(5)$ debe ser 2. Lo comprobamos:
$f^{-1}(5) = \frac{5+1}{3} = 2$.

Además, si la función f multiplica por 3 y resta 1, la función f^{-1} suma 1 y divide entre 3, es decir, "hace lo contrario en el orden contrario".

Se cumple que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer-tercer cuadrantes ($y = x$).

Compruébalo dibujando las gráficas de las funciones del ejemplo anterior.

Piensa cuáles son las funciones recíprocas de $y = senx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = 2^x$

Escribe una función que no sea inyectiva.

Actividades

15. Representa $y = 3x$, $y = \frac{x}{3}$ y comprueba que son recíprocas (inversas).

16. Halla, si es posible, la función recíproca de:

a) $f(x) = 2x+4$ **b)** $g(x) = \frac{x+1}{x}$ **c)** $h(x) = 3x^2 - 1$ **d)** $f(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$

17. Sean $f(x) = \frac{3x-1}{x+3}$ y $g(x) = 2x+4$. Calcula:

- **a.** $(f \circ g)(x)$
- **b.** $(g \circ f)(x)$
- **c.** $f^{-1}(x)$
- **d.** $f^{-1}(2)$
- **e.** $(f - g)(x)$
- **f.** $(f - g)(0)$
- **g.** $(f / g)(x)$
- **h.** $g^{-1}(x)$

18. ***TRABAJO EN GRUPO***

Representación gráfica y análisis de las características (dominio, recorrido simetrías, periodicidad, monotonía, extremos y acotación) de las siguientes funnciones:

1. ***Polinómicas:*** *de grado 0 ($y=k$), 1 ($y = ax+b$) y 2 ($y= ax^2 +bx+c$)*
2. ***Exponenciales:*** *$y = a^x$ siendo $a>1$ ó $0<a<1$*
3. ***Logarítmicas:*** *$y = \log_a x$ siendo $a>1$ ó $0<a<1$*
4. ***De proporcionalidad inversa:*** *$y=\frac{k}{x}$, $y=\frac{k}{x-a}$ distinguiendo $k>0$ $k<0$ y siendo a cualquier nº real.*
5. ***Trigonométricas*** *$y = \operatorname{sen}x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg}x$*

EJERCICIOS Y CUESTIONES

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. Una función lineal cumple que $f(1)=3$ y $f(-2)=-9$. Halla su expresión analítica.

2. Representa $y = \frac{1}{2}x^2$. Y a partir de ella representa también:

a) $y = \frac{1}{2}x^2+3$ b) $y = \frac{1}{2}x^2-1$

3. Represента las funciones: **a)** $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-2,1) \\ x^2-2x+1 & x \in [1,4) \\ 2 & x > 4 \end{cases}$

b) $y = |-x^2+2x+4|$

c) $y = \left|\frac{x}{3}-2\right|$

4. Dibuja una gráfica que no sea función e indica porqué no lo es.

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{5x}{x^2+2x}$ **b)** $y = \sqrt{2-x}$ **c)** $y = \sqrt[3]{-x+1}$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{-x+1}}$ **e)** $y = \log_2(x+1)$ **f)** $y = x^4+3x-1$

6. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x+2 & -1 \le x < 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$

Indica también su dominio.

7. Dada la función $f(x) = 4x - 6$, se pide:

a. ¿Existe $f^{-1}(x)$?
b. Si existe, calcúlala.
c. Calcula $f^{-1}(f(x))$ y $f(f^{-1}(3))$

8. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones con las características que se citan a continuación:

a. $Dom(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $Im(f)=(-2,2)$ y decreciente en todo el dominio.

b. $Dom(f)=R-\{0\}$, $Im(f)=R$, estrictamente creciente en $(-\infty,0)$ y estrictamente decreciente en $(0,\infty)$

c. Dom(f)=R, Im(f)=$[0,\infty)$, simetría respecto del eje de ordenadas, máximo relativo en el punto (0,2) y mínimos relativos en (3,0) y (-3,0)

d. Dom(f)=R, simetría respecto del origen de coordenadas, acotada por –1 y 1, alcanzando la función ambos valores, mínimo relativo en (-2,-1) y máximo relativo en (2,1).

9. Dada la función $f(x) = 2x - 2x^2$, comprueba que verifica $f(-x) = f(x+1)$.

10. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ y $g(x) = x^2+2$, determina, con sus respectivos dominios, las funciones:

a) f+g **b)** f·g c) f/g **d)** $g \circ f$ **e)** $g \circ g$

11. Analiza el efecto que producen sobre la gráfica de una función f(x) las siguientes transformaciones:

a) añadir el valor absoluto: |f(x)|
b) sumar (restar) un número a f(x): f(x)+k
c) sumar (restar) un número a x: f(x+k)
d) función opuesta -f(x)

* Para pensarlo, puedes empezar por imaginar una función sencilla, por ejemplo $f(x) = x^3$. Intenta dibujar $\lvert x^3 \rvert$, x^3+2 y $(x+2)^3$. Después generaliza a cualquier función y cualquier k.

12. A partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, representa:

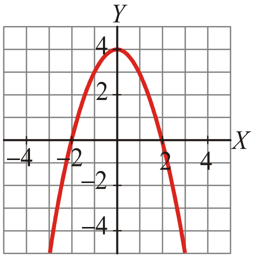
a) f(x) - 3 **b)** f(x+2) **c)** |f(x)| **d)** -f(x)

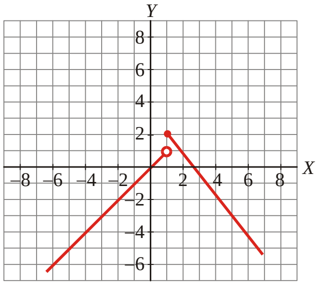
13. Representa gráficamente la función f(x) = |x-2|. Escribe su expresión analítica como función a trozos.

14. Elena va a visitar a su amiga Teresa y tarda 15 minutos en llegar a su casa que está a 1 km. de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

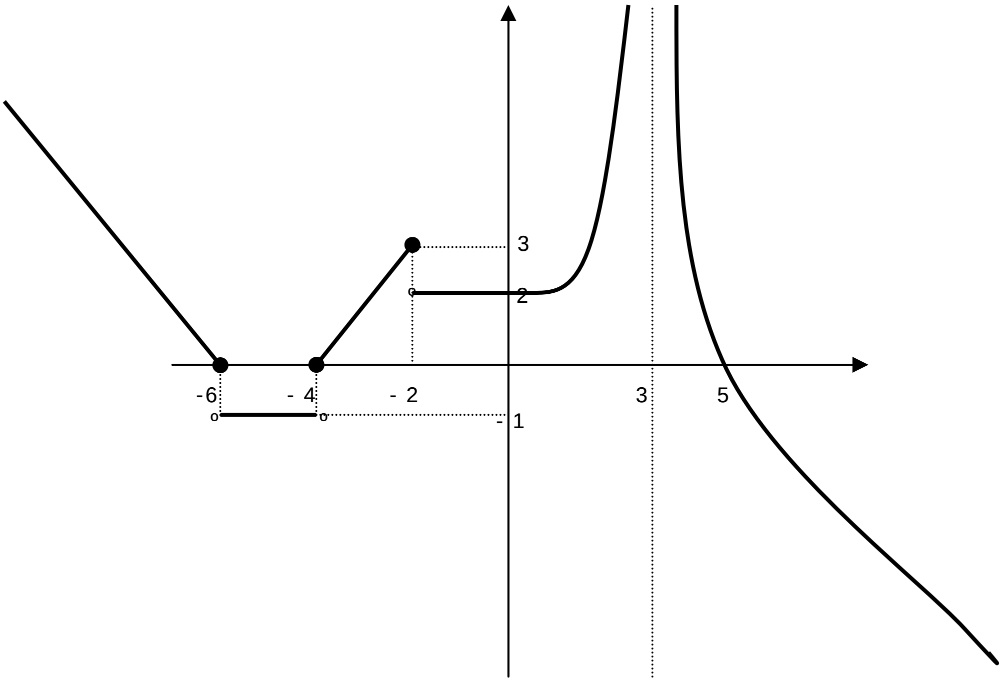
a) Identifica la variable dependiente y la independiente
b) Representa la función tiempo-distancia
c) Encuentra su expresión analítica.

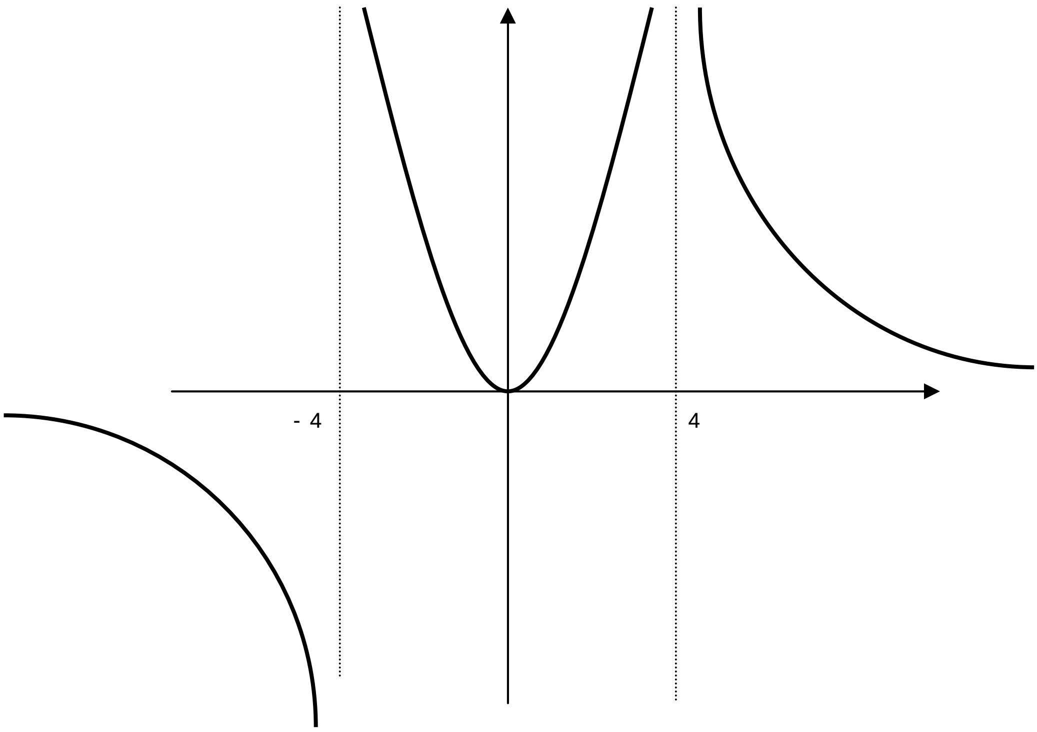
15. Encuentra la expresión analítica de las funciones:

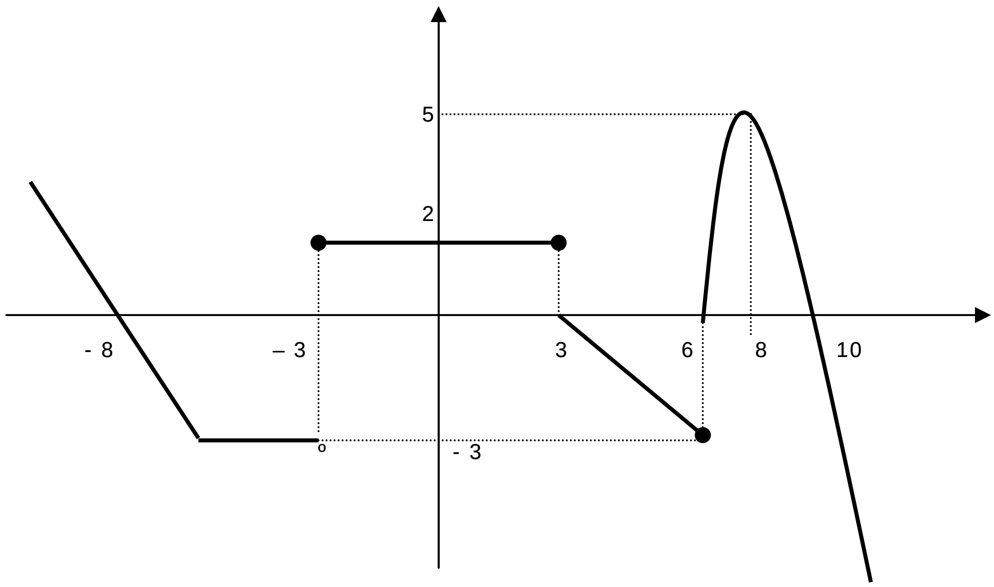




16. Analiza las siguientes funciones:







Halla la expresión analítica de las dos últimas funciones.

17. Calcula la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$ **b)** $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ **c)** $f(x) = x - x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2 + 2}$ **f)** $f(x) = \sqrt[5]{x^5 + x^3}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$

18. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ x^2 + 1 & 2 < x < 5 \\ 3 & 5 \leq x \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ x - 3 & 3 \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \geq 0 \\ x^2 & -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 3^x & 0 \leq x \end{cases}$

19. Sean $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$ y $h(x) = \dfrac{2x + 3}{7 - 5x}$. Calcula:

a) Las recíprocas de f(x), g(x) y h(x).
b) (fog)(1), (hof)(0)
c) (f/g)(-1), (f·g)(2), (h+g)(-2) y (g-h)(3)

CUESTIONES

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-9}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, comprueba si existe su función suma $f+g$ o producto $f \cdot g$

2. ¿Existe alguna función par e impar a la vez? ¿Cuál?

3. Dibuja una función periódica que no sea trigonométrica.

4. Si f(x) es estrictamente creciente en R ¿puede ser par? , ¿puede ser acotada superiormente?

5. La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x es racional} \\ 1 & \text{si x es irracional} \end{cases}$

a) es una función de dominio R
b) es ina función de dominio R-Q
c) es una función constante
d) no es una función.

6. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$, la función $f \circ g$ es

a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

b) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+5}$

c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+5}$

d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+5}}$

7. Sobre las funciones del ítem anterior, podemos afirmar que el dominio de f es:

a) $R^* = R-\{0\}$ **b)** R^+_* = reales positivos sin el 0

c) R^+ = reales positivos **d)** R^- = reales negativos

8. El dominio de g es:

a) $[-5,\infty)$ **b)** $(-5,\infty)$ **c)** $R - \{5\}$ **d)** $R - \{-5\}$

9. El dominio de $f \circ g$ es:

a) R^+ **b)** $(-5,\infty)$ c) $[-5,\infty)$ **d)** $R - \{-5\}$

10. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x) = x+1$, señala la afirmación correcta:

a) Las funciones f y g son iguales, aunque $Dom(f) \neq Dom(g)$
b) Las funciones f y g son distintas, aunque si $x \neq 1$, $f(x) = g(x)$
c) Salvo algún x aislado, $f(x) \neq g(x)$
d) Nada de lo anterior es cierto.

11. Dadas las funciones $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = x^2 + x - 2$, se puede asegurar que:

a) f es una función impar
b) g es una función par
c) f+g es una función par
d) f+g es una función impar.

Relaciona cada dominio de definición con su respectiva función.

1) $(2,+\infty)$	**1.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+9}$
2) $R-\{-7\}$	**2.** $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x-8}$
3) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$	**3.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$
4) $R-\{-2,\ 2\}$	**4.** $y=\dfrac{1}{x^2-16}$
5) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	**5.** $y=\sqrt{3x-4}$
6) $[0,8)\cup(8,+\infty)$	**6.** $y=3^{\frac{1}{x}}$
7) $(0,+\infty)$	**7.** $y=\dfrac{3}{x+7}$
8) $(-\infty,-9)\cup(-9,-1]\cup[2,+\infty)$	**8.** $y=\sqrt{2x^2+4}$
9) $\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$	**9.** $y=\log(x+3)$
10) $(-3,+\infty)$	**10.** $y=\dfrac{2x}{\log_2 x}$
11) $[5,+\infty)$	**11.** $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-5}$
12) R	**12.** $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$

Asocia a cada una de estas gráficas su ecuación:

1) $y = \dfrac{1}{x-4}$

2) $y = -\sqrt{x+1}$

3) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

4) $y = \sqrt{2x}$

5) $y = \dfrac{-3x^2}{4}$

6) $y = \dfrac{-3x}{4}$

7) $y = 2x^2 - 2$

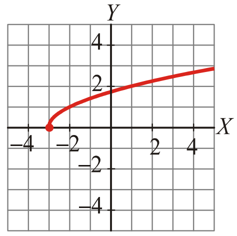
8) $y = 2x - 2$

9) $y = \sqrt{x-3}$

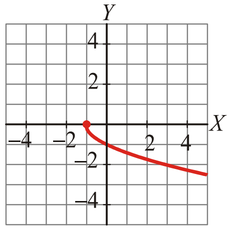
10) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$

11) $y = \dfrac{1}{x} - 3$

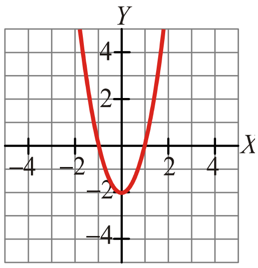
12) $y = \sqrt{x+3}$



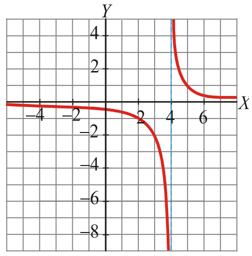
1.



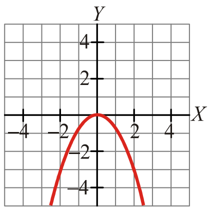
2.



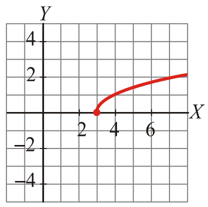
3.



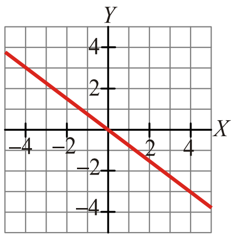
4.



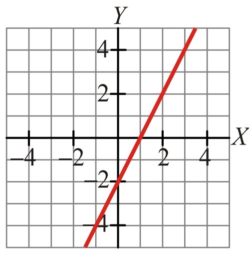
5.



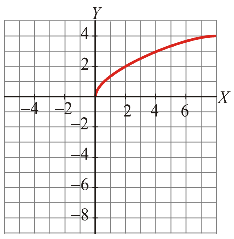
6.



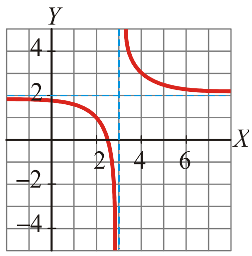
7.



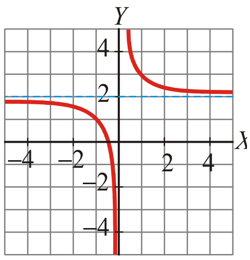
8.



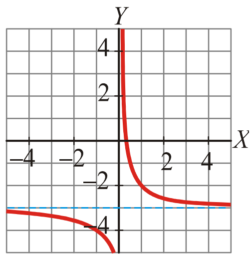
9.



10.

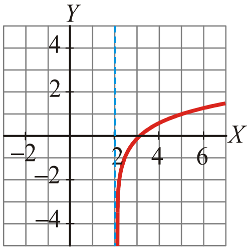


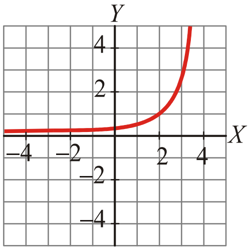
11.

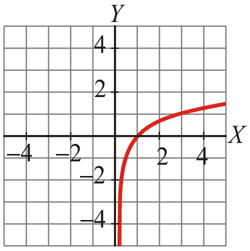


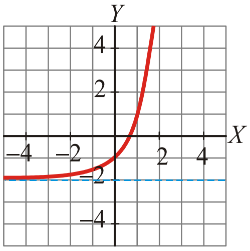
12.

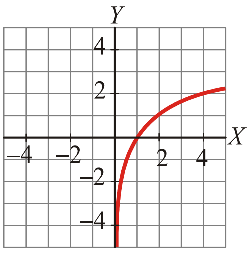
Asocia cada gráfica con su correspondiente ecuación:

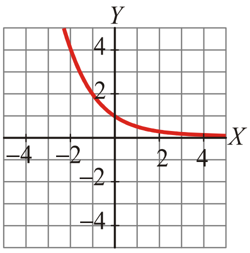
1) 

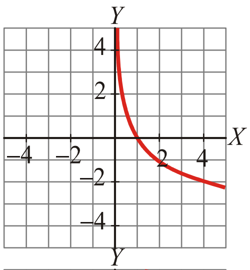
2) 

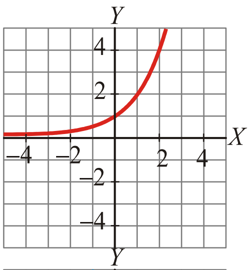
3) 

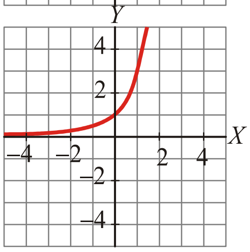
4) 

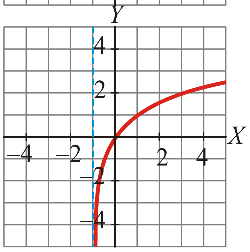
5) 

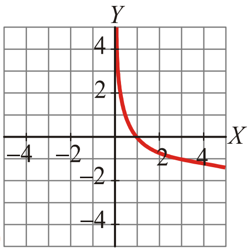
6) 

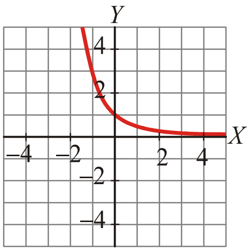
7) 

8) 

9) 

10) 

11) 

12) 

1. $y = 3^{x-2}$

2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. $y = 3^x - 2$

4. $y = \log_3(x-2)$

5. $y = 3^x$

6. $y = \log_3 x$

7. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8. $y = 2^x$

9. $y = \log_2(x+1)$

10. $y = \log_{1/2} x$

11. $y = \log_2 x$

12. $y = \log_{1/3} x$

Asocia cada función con su gráfica.

1) $q(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

2) $i(x)=\sqrt{2x+3}$

3) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

4) $p(x)=x^2-x-2$

5) $s(x)=\sqrt{x^2+1}$

6) $h(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-4}$

7) $m(x)=\sqrt{2-x}$

8) $l(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

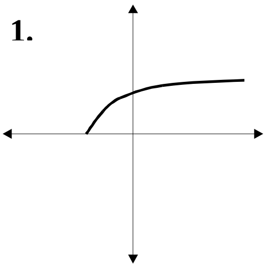
9) $j(x)=\sqrt{x^2-4}$

10) $k(x)=\dfrac{1}{x+2}$

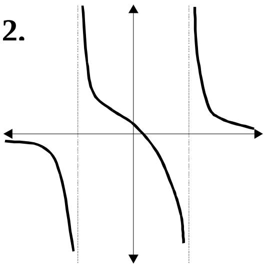
11) $r(x)=\sqrt{1-x}$

12) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

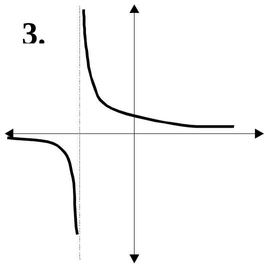
1.



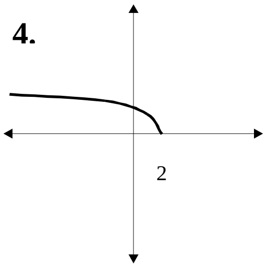
2.



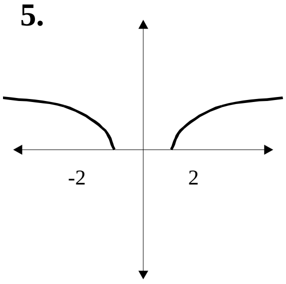
3.



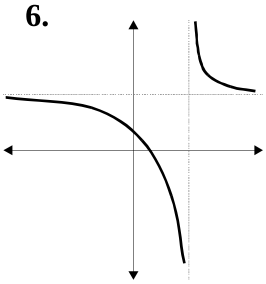
4.



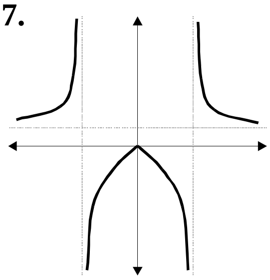
5.



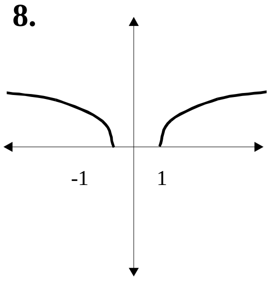
6.



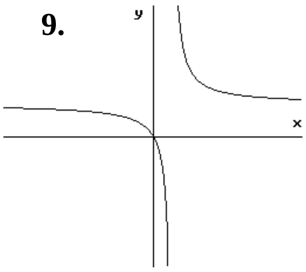
7.



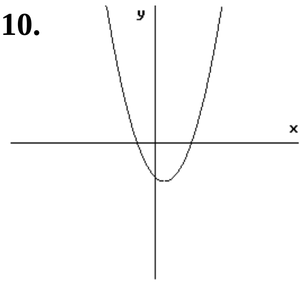
8.



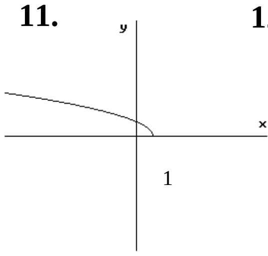
9.



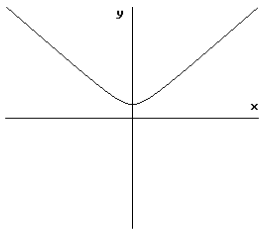
10.



11.



12.



UNIDAD 8

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Calcular las tendencias de una función a partir de su gráfica.
2. Resolver las indeterminaciones más usuales en el cálculo de límites.
3. Conocer el concepto de límite en un punto e interpretarlo gráficamente.
4. Determinar de forma intuitiva la continuidad de una función a partir de su gráfica.
5. Resolver, mediante el cálculo de límites, la continuidad de una función dada por su expresión analítica.

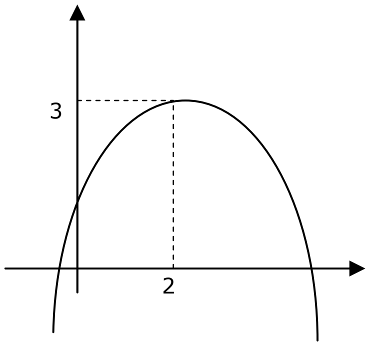
CONCEPTOS:

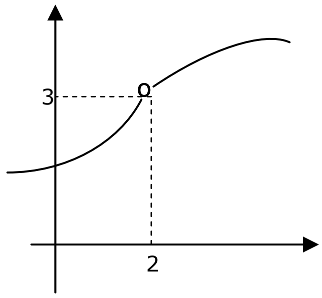
1. Límite de una función en un punto: concepto y definición.
2. Límites laterales.
3. Propiedades de los límites.
4. Cálculo de límites.
5. Indeterminaciones $\frac{k}{0}$ ($k \neq 0$), $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}
6. Continuidad de funciones: concepto, definición y tipos de discontinuidad.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. INTRODUCCIÓN

Fíjate en las siguientes gráficas:

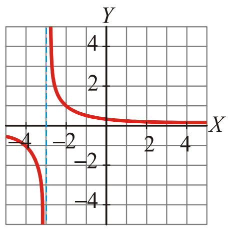




En la primera gráfica se observa que la imagen de 2 es 3, es decir, f(2)=3. En la segunda, sin embargo, no existe f(2) (en su lugar hay un punto vacío) pero ello no impide que observemos que la función está situada en "los alrededores" de 3.

Esto es debido a que, aunque x=2 no tiene imagen, sí la tienen los puntos próximos a él: 2'01, 2'0003, 1'99997… etc. Son las imágenes de estos puntos de "alrededor" de 2 las que nos permiten conocer cómo es la función, no ya en el punto 2 cuya imagen no existe, sino en un ENTORNO suyo.

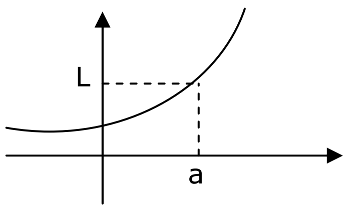
En la siguiente gráfica el punto x=-3 no tiene imagen pero se puede observar que la función se acerca a $+\infty$ por la derecha de -3 y a $-\infty$ por su izquierda.



También se puede ver que a medida que los valores de **x** tienden a $+\infty$, sus imágenes van aproximándose a 0 sin que la función llegue a valer 0 dentro de R.

La idea de "tender" o "aproximarse infinitamente" a un valor pero sin llegar nunca a él es lo que da lugar al concepto de LÍMITE.

Intuitivamente, el límite de una función f(x) en un punto x = a es el **valor L** al que **tienden las imágenes y** = f(x) de los valores de x que se aproximan o tienden a **"a"**.



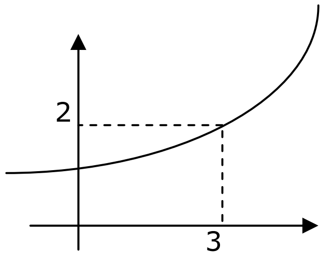
Se utiliza el símbolo $\rightarrow$ para expresar la idea de "tender a". Por tanto, podemos escribir la idea anterior de la siguiente forma: si $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow L$. Pero se ha adoptado como notación habitual $\mathbf{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L}$.

Se lee: límite cuando x tiende a "a", de f(x) es igual a L.

*****Recuerda que si L es el límite cuando x tiende a ser "a", eso no significa que f(x) sea igual a L, sino que lo es su límite, es decir, el valor al que tienden a acercarse las imágenes de los valores de x próximos a "a". **

Veamos una serie de ejemplos que nos acerquen a la idea de límite:

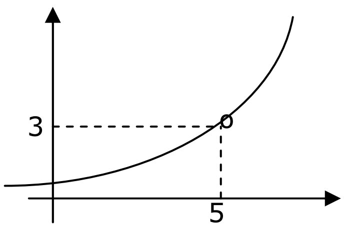
<u>Ejemplo:</u> *Escribe valores de x que "tiendan" a 3. A medida que se acercan, ¿dónde tienden sus imágenes?*



***Llamamos "tender" a acercarse infinitamente a x=3. Esta aproximación sería un proceso infinito, sin final, porque, como sabes, los números reales no son consecutivos, y siempre podrías encontrar un nº real más cercano a 3 que el anterior. ***

<u>Ejemplo</u>:

¿Cuánto vale la imagen de 5? Si consideramos valores que tienden a 5, ¿dónde tienden sus imágenes? Completa:

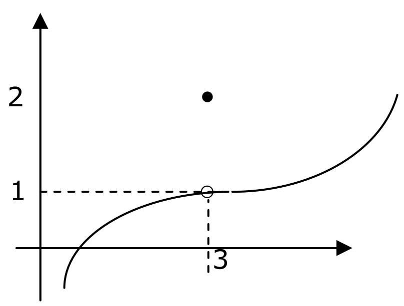


f(5) =

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$

<u>Ejemplo</u>:

¿Cuánto vale la imagen de 3? Si consideramos valores que tienden a 3, ¿dónde tienden sus imágenes?

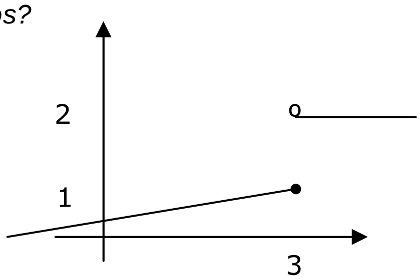


f(3) =

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

Ejemplo:

¿Cuánto vale la imagen de 3? Si consideramos valores que tienden a 3, ¿dónde tienden sus imágenes? ¿Qué opinas del límite en este caso? ¿Podría haber dos?



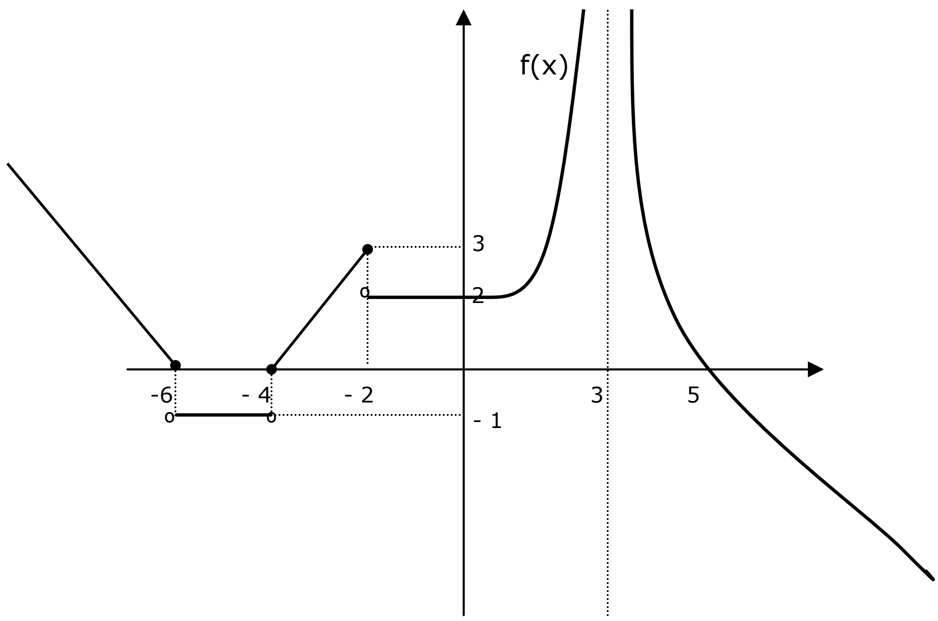
$f(3) =$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

Intuitivamente, no tendría sentido que hubiera dos límites en un punto, puesto que mientras se tiende a uno de ellos sería necesario alejarse del otro, lo que entraría en contradicción con la idea de límite. En el caso de que esto ocurra, diremos que NO EXISTE el límite.

Actividad

1. Dada la función:



Calcula los siguientes límites e imágenes:

a) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -6^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ j) $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x)$ k) $\lim\limits_{x \to -6} f(x)$ l) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

m) f(-6) n) f(0) o) f(3) p) f(-4) q) f(5) r) f(-2)

Como ves, el límite no depende del punto "a" puesto que sólo se observan las imágenes de los puntos de un pequeño entorno a su alrededor (estaríamos hablando de un **entorno reducido de a** (a-r, a+r)-$\{a\}$, *¿lo recuerdas?*)

Sin embargo, parece lógico que los puntos próximos a "a" tengan sus imágenes próximas a la suya f(a).

Por eso los límites se calculan, en principio, sustituyendo x por a, es decir, hallando f(a).

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}(x^3 + x - 1) = 2^3 + 2 - 1 = 9$$

Este resultado indicaría que la función f(x) = $x^3 + x - 1$ se encuentra en los alrededores de 9 en la vertical de x=2.

(Este ejemplo nos da una idea de cómo calcular el límite de una función en un punto x=a, cuando no disponemos de la gráfica de dicha función para verlo, sino de su fórmula o expresión analítica).

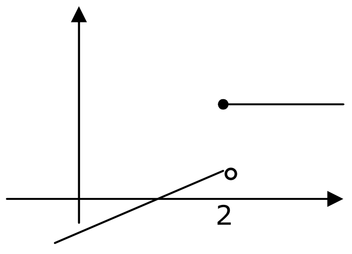
Actividad

2. Calcula los siguientes límites:

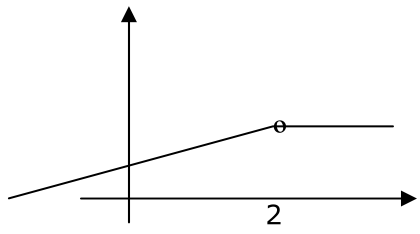
a) $\lim_{x\to 3} 5$ **b)** $\lim_{x\to +\infty} x^{-2}$ **c)** $\lim_{x\to -\infty} -1$ **d)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$ **e)** $\lim_{x\to -\infty} x^4$

Sin embargo, no siempre el límite en un punto tiene que ver con la imagen de dicho punto. De hecho, en un punto puede haber imagen y no límite, límite y no imagen; puede haber ambas cosas siendo iguales o distintas entre sí y puede que no exista ninguna de las dos. Observa un ejemplo de cada caso:

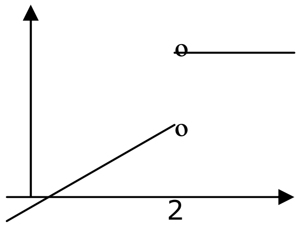
A) Imagen sí, límite no:



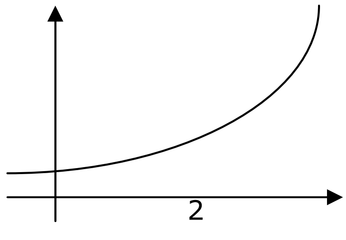
B) Imagen no, límite sí:



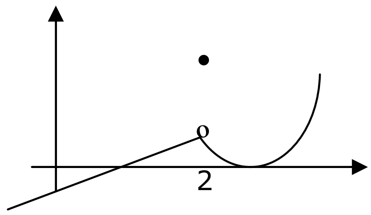
C) Imagen no, límite no:



D) Imagen y límite sí. Iguales entre sí:



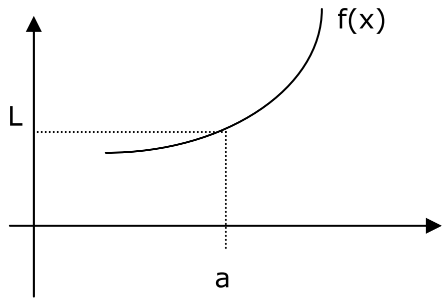
E) Imagen y límite sí. Distintos entre sí.



Estarás de acuerdo en que la relación entre el límite y la imagen es ambigua y que el límite resulta más útil precisamente cuando no disponemos de la imagen de un punto, para conocer "dónde" se encuentra la función en los alrededores de dicho punto. (Intuitivamente, vendría a ser como un microscopio que amplía la función en los alrededores de cualquier punto "a", e informa de la posición de la función en ese pequeño entorno).

Vamos a formalizar ahora matemáticamente todas estas ideas. El lenguaje matemático se caracteriza por la búsqueda de la precisión y el rigor a la hora de definir cada concepto. No es lo mismo comprender intuitivamente una idea que escribir con exactitud en qué consiste. Por eso, a veces, resulta complejo leer matemáticas.

2. **DEFINICIÓN**:



Se dice que **f(x) tiene límite L cuando x tiende a "a"** y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cualquier entorno de L (es decir un intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$) existe un entorno reducido de a $(a-\delta, a+\delta)$-{a} tal que todos los $x \in (a-\delta, a+\delta)$-{a} tienen sus imágenes $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Todavía podemos escribirlo de manera más reducida:

$$\forall\ E(L,\varepsilon),\quad \exists\ E^*(a,\delta)\ /\ \text{si } x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$$

Y aún más:

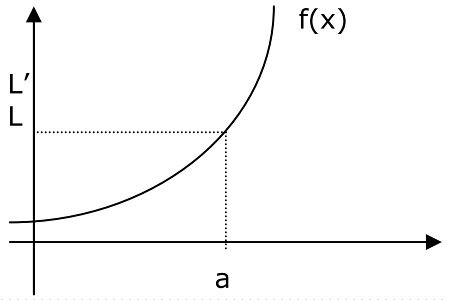
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ \text{si } x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$$

($\forall$: para todo $\exists$: existe)

Con esta definición se pretende especificar cuál es la condición que cumple L y sólo L: que en cualquiera de sus entornos se pueden encontrar imágenes de puntos x muy próximos a "a".

Dicho de otra forma, para cualquier "alrededor" de L encontraremos un pequeño entorno de "a" cuyos puntos tienen sus imágenes en el entorno de L. De esa forma, aseguramos que los puntos próximos a "a" tienen sus imágenes próximas a L.

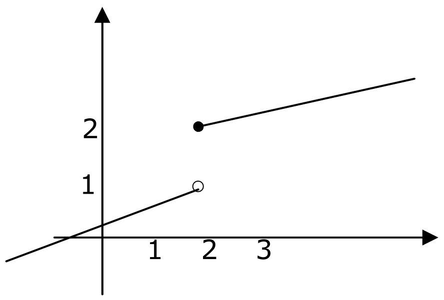
Comprueba si L' verifica la misma condición:



Como hemos visto anteriormente, la definición se debe desdoblar para incluir los casos en que el comportamiento de la función es distinto a la izquierda que a la derecha del punto.

3. LÍMITES LATERALES

Se dice que el **límite por la derecha** de f(x) en el punto "a" es L_1, y se escribe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1$ si los x próximos a "a" por su derecha, tienen sus imágenes tendentes a L_1. Y se dice que el **límite por la izquierda** de f(x) en el punto "a" es L_2, y se escribe $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_2$, si los x próximos a "a" por su izquierda, tienen sus imágenes tendentes a L_2.



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

La condición necesaria y suficiente para que exista límite en un punto es que existan sus límites laterales y sean iguales.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Siempre que los límites laterales sean distintos diremos que no existe límite puesto que no tiene sentido "acercarse" a dos lugares distintos a la vez.

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<1 \\ x^2+2x & 1 \le x < 3 \\ 15 & x \ge 3 \end{cases}$

Halla el límite en los puntos 0,1,2 y 3

A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(3x+1) = 1$

(los valores de x muy próximos a 0 están TODOS en la primera rama de la función).

B) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(3x+1) = 4 \end{cases}$ No existe límite.

(hemos tenido que realizar por separado los límites laterales, ya que los x próximos a 1 por su derecha son mayores que 1 y están en la segunda rama, y los valores próximos por su izquierda son menores que 1 y se encuentran en la primera rama).

C) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x) = 8$

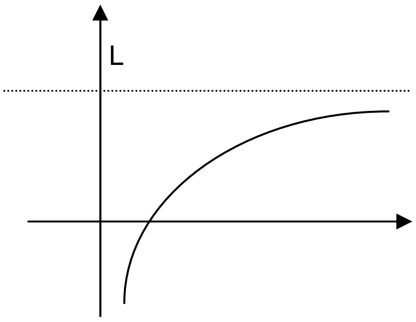
(los x muy próximos a 2 están TODOS entre 1 y 3).

D) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} 15 = 15 \\ \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2+2x) = 15 \end{cases}$ El límite existe y es igual a 15

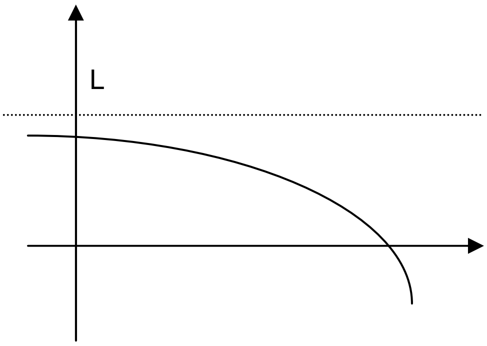
(los x que tienden a 3 se encuentran en dos ramas distintas de la función: los que tienden por la derecha (3'0001, 3'0000001…)que están en la tercera rama por ser mayores que 3, y los que tienden por su izquierda(2'999, 2'9999998…) que son menores que 3 y están en la segunda).

4. LÍMITES INFINITOS

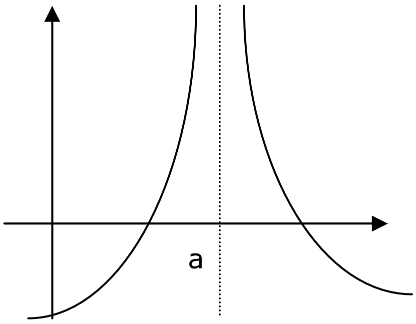
Tanto "a" como L pueden ser infinito:



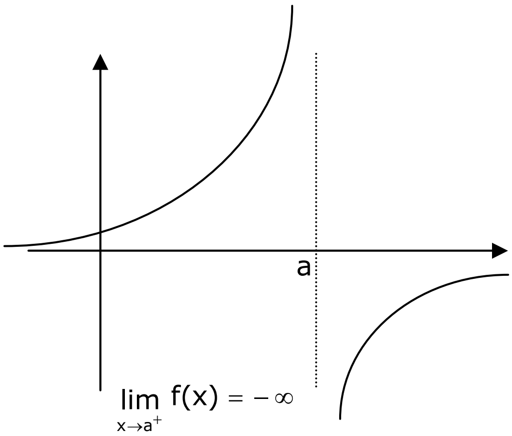
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

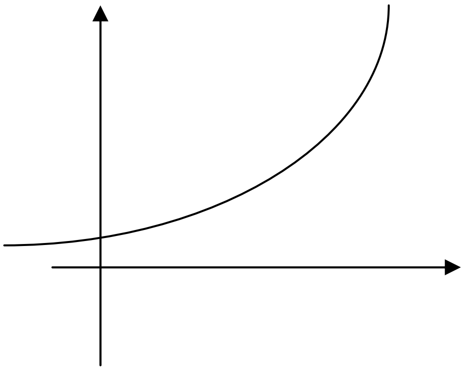


$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

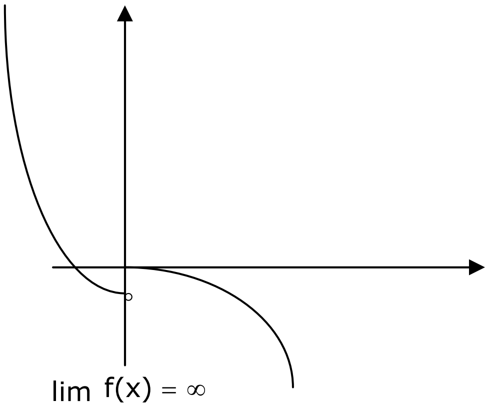


$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Dibuja una función que cumpla:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, *f(1) = 0,* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$ *y que no exista límite en x=3.*

5. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1) El límite de f(x) en x = a existe si coinciden los límites laterales y, de ser así, es **único.**

2) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to a} (f / g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5) $\lim\limits_{x \to a} (kf)(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

6) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

Como puedes observar, operar con límites es sencillo, pues se cumple que el límite de la suma, resta, multiplicación, división y potencia es la suma, resta, multiplicación, división y potencia de los límites respectivamente.

Si disponemos de la gráfica de la función, parece sencillo calcular el límite en cada punto. Pero lo habitual es que conozcamos no su gráfica, sino su fórmula o expresión analítica. Necesitamos, por tanto, aprender a calcular límites a partir de la expresión analítica de la función.

6. CÁLCULO DE LÍMITES

Ya habíamos indicado anteriormente que lo natural es que el límite coincida con la imagen, ya que los puntos próximos a "a" tendrán imágenes próximas a la suya f(a). (También hemos dicho que esto no tiene por qué ser cierto).
Por eso, los límites se calculan inicialmente cambiando x por "a".

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to -2}(x^2+3x)=(-2)^2+3(-2)=-2$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^3}=\frac{5}{27}$

3) $\lim_{x\to \infty}(2x+3)=2\cdot\infty+3=\infty$

Representa gráficamente, de manera aproximada, los resultados obtenidos.

Pero observa lo que sucede en los siguientes casos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}=\frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}=\frac{2}{0}$$

Algunas de estas operaciones te resultarán desconocidas. ¿Cuánto es $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$?

Muy sencillo, sabemos que $\frac{15}{5}=3$ porque 3·5=15. Luego $\frac{0}{0}$ debe ser un nº que multiplicado por 0 dé 0. ¡¡Y todos los números reales cumplen eso!!

Por tanto, $\frac{0}{0}$ es un número cualquiera o indeterminado, es decir, $\frac{0}{0}=k$ porque k·0=0.

Se dice entonces que $\frac{0}{0}$ es una INDETERMINACIÓN.

Observa que ocurre exactamente lo mismo con la operación $\frac{\infty}{\infty}$. Sabemos que cualquier nº multiplicado por ∞ da ∞. Por eso $\frac{\infty}{\infty} = k$, ya que $k \cdot \infty = \infty$

Luego también $\frac{\infty}{\infty}$ es una INDETERMINACIÓN.

De hecho son la misma operación, ya que podemos escribir: $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{3}{0}}{\frac{5}{0}} = \frac{3 \cdot 0}{5 \cdot 0} = \frac{0}{0}$

Igualmente son indeterminaciones: $\infty - \infty$, $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0, $0 \cdot \infty$

Veamos cómo "determinar" en cada caso las indeterminaciones, es decir, cómo averiguar en cada función y punto concretos, cuál es el valor que adopta la indeterminación:

6.1 Indeterminación $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0}$

Esta "indeterminación" es diferente a las demás pues $\frac{k}{0}$ no es igual a cualquier nº real. De hecho no es igual a ninguno, pues ningún nº real multiplicado por 0 puede dar k. Ya sabíamos que cualquier número dividido entre 0 da ∞. El problema está en el signo: puede ser $\pm\infty$. Ello se debe a que el denominador no es 0 exactamente, sino que "tiende" a serlo. Y no sabemos si se acerca a 0 por su izquierda (por los números negativos), o por su derecha (positivos).

Por eso **es necesario calcular los límites laterales**: para determinar si el resultado es $+\infty$, $-\infty$. Si existen los límites laterales y son iguales, la función tiene límite; si son distintos, el límite no existe.

Ejemplo:

$\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{0}$ indeterminación. Calculamos los límites laterales:

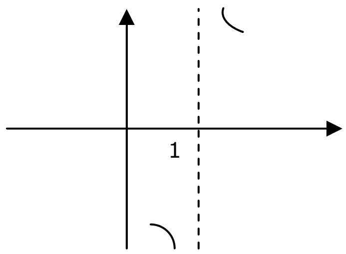
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Como los números que tienden a 1 por su derecha son de la forma 1'0001, 1'0000001…, al sustituirlos en x y restar 1 se obtienen valores cada vez más próximos a 0 pero siempre positivos (se indica escribiendo 0^+).

Sin embargo, si x tiende a 1 por su izquierda toma valores de la forma 0'999, 0'999999…, y la resta de 1 dará como resultado números tendentes a 0, pero negativos.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Como los límites laterales no coinciden, diremos que **no existe límite** en x=1. Pero eso no impide que hayamos cumplido nuestro objetivo: ahora sabemos cómo es la función en un pequeño entorno de 1. ¿No es así?



Actividad

3. Calcula los siguientes límites: (Tipo k/0 $k\neq 0$)

a) $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{x^2-1}$ **b)** $\lim_{x\to -3}\frac{x}{2x+6}$ **c)** $\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}$ **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

6.2 Indeterminación $\frac{0}{0}$

Ejemplo: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{0}{0}$

Vamos a establecer dos casos:

A) Si f(x) es racional (cociente de polinomios como en el ejemplo anterior), el hecho de obtener el valor 0 al sustituir x por 2 tanto en el numerador como en el denominador, significa que 2 es una raíz de ambos polinomios. Por tanto, si los descomponemos en factores, aparecerá el factor (x-2) en el numerador y en el denominador y podrá simplificarse.

Por eso, en el caso $\frac{0}{0}$ se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica el factor (x – a) que será común a ambos.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\frac{0}{0}\quad \text{indeterminado}$$

descomponemos en factores numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$$

¿Existe f(2)? ¿Qué significa que el límite sea 1?

B) Si f(x) contiene raíces cuadradas, se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1-x}-1}=\frac{0}{0}\quad \text{indeterminado, multiplicamos numerador y denominador}$$

por el conjugado del denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{1-x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{-x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{-1}=\frac{3\left(\sqrt{1-0}+1\right)}{-1}=\frac{3\,(1+1)}{-1}=-6$$

Haz un esbozo gráfico del resultado.

Actividad

4. Calcula los siguientes límites: (Tipo 0/0)

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)^2}$ **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

6.3 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+2}{x-3}$

Antes de estudiar la manera de resolver esta indeterminación veamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x+2) = \infty^2 - \infty + 2 = \infty$$

La resta $\infty^2 - \infty$ es igual a ∞ ya que a $\infty^2 = \infty \cdot \infty$ (infinitas veces ∞) sólo le quitamos ∞ (una vez ∞) y, por tanto, seguirá quedando ∞. Sumarle después 2 es irrelevante.

Podemos deducir que al cambiar x por ∞ en un polinomio, el término de mayor grado convierte en irrelevantes a todos los demás pues, si es de grado 4 por ejemplo, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $\infty^4 = \infty \cdot \infty^3$ es infinitas veces ∞^3, mientras que el siguiente término bx^3 sólo contiene b veces ∞^3 (un nº finito). (Sumar o restar 2 a ∞, es lo mismo que sumar o restar ∞ a ∞^2, ∞^2 a ∞^3, y así sucesivamente : **irrelevante**).

Nos basaremos en esta conclusión para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Veamos los siguientes ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+5}{x+3} = \frac{\infty}{\infty}$ (indeterminación) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2x = 2\cdot\infty = \infty$

Observamos que el ∞ del numerador es infinitas veces mayor que el del denominador, luego el cociente es ∞.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x+5}{x+3} = \frac{\infty}{-\infty} = -\infty$

La solución final (∞) lógicamente es la misma, pero debe respetarse el signo (–) de la indeterminación, pues las imágenes de los valores de x próximos a $-\infty$ son negativas en la función f(x)= $\frac{2x^2+x+5}{x+3}$. (*Compruébalo con x = -10⁶*).

Podemos deducir, por tanto, que siempre que el numerador sea de mayor grado que el denominador, la solución será $\pm\infty$.
(Dado que el infinito del numerador será infinitas veces mayor que el del denominador y se respetará el signo del cociente).

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x+1}{2x^3+5} = \frac{\infty}{\infty}$ (indeterminación) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Esto significa que **si los polinomios son del mismo grado, el límite coincidirá con el cociente de los coeficientes de mayor grado.**

Lógicamente, la división entre 3 veces ∞^3 y 2 veces ∞^3, es 3/2, pues ambos infinitos son de la misma categoría.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - 1}{x^3 + 3x} = \dfrac{\infty}{\infty} (\text{indeterminación}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3}{\infty} = 0$

Deducimos también que **si el numerador es de grado menor que el denominador, la solución será siempre 0.**

La razón es evidente: el denominador es infinitamente mayor, y la división entre infinito es 0.

Con estas conclusiones podemos calcular cualquier límite de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aunque no venga dado como un cociente de polinomios.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 2}{\sqrt{x^6 + 1}} = \dfrac{\infty}{\infty} (\text{indet.}) = 0$

El numerador es de grado 2 y el denominador de grado 3 (6/2).

Actividad

5. Calcula los siguientes límites: (Tipo ∞ / ∞)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^3 + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{-5x^2 + 2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 - x^2 + 3}{2x^2 - x + 5}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1 + x)^2 - 1}{x}$

6.4 Indeterminación $\infty - \infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x})$

Distinguimos dos casos:

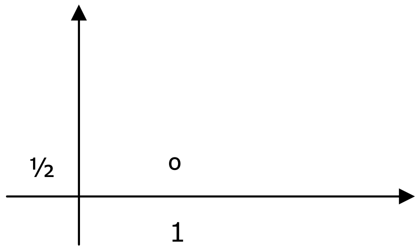
A) Si f(x) es la resta de dos funciones racionales se opera primero hasta conseguir una función racional.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty$$ indeterminación. Resolvemos el paréntesis:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Recuerda que debes conocer la interpretación gráfica del resultado obtenido, pues de otra manera no tendría sentido calcular límites



B) Si f(x) es una resta de funciones con raíces cuadradas, se multiplica y se divide por la expresión conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)=\infty-\infty,$$ indeterminado, multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Actividad

6. Calcula los siguientes límites: (Tipo $\infty-\infty$)

a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$ **b)** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-3x)$ **c)** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-1})$

Estarás de acuerdo en que el límite es más útil precisamente cuando es indeterminado, puesto que eso indica que probablemente no hay imagen. La información que aporta el límite, aunque aproximada, sustituye a la que debería haber dado la imagen.

7. CONTINUIDAD

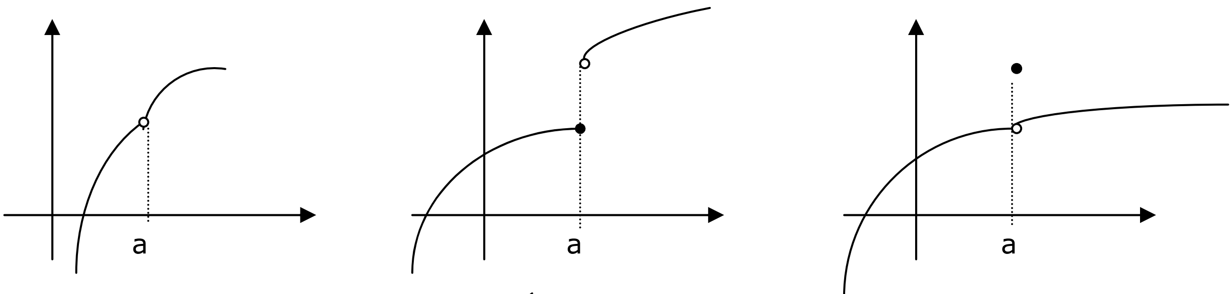
Intuitivamente, podemos entender por función continua aquella que puede dibujarse "sin levantar el lápiz del papel".

Pero ya sabemos que las matemáticas exigen algo más de rigor para definir cada concepto. Si nos preguntamos qué condición o condiciones debe cumplir una función para ser continua en un punto, llegaremos a esta conclusión:

Definición: Una función **f(x) es continua en un punto x=a** si cumple:

1) **existe f(a)** (es decir, $a \in \text{Dom}(f)$)
2) **existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$** (los límites laterales existen y son iguales)
3) **$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$** (imagen y límite coinciden)

Observa que cada condición es imprescindible pues, de no cumplirse, se produce una discontinuidad.



$\nexists f(a)$ $\quad$ $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

La imagen es lo que ocurre **en** el punto x=a; el límite es lo que ocurre en un pequeño **alrededor.** Observa que para que f sea continua en x=a, se pide que "lo que ocurre en "a" sea lo mismo que lo que ocurre a su alrededor". Lógico, ¿no?.

Diremos que una función es **continua en un intervalo** si lo es en cada punto del intervalo.

Se produce una discontinuidad siempre que se incumple una o más de las tres condiciones anteriores.

Dibuja funciones que verifican las siguientes condiciones:

1) *no existe f(2) pero sí* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
2) *no existe f(2) ni* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
3) *existe f(2) pero no* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
4) *existen f(2) y* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ *pero son distintos*

Observa tus dibujos. Si tuvieras que clasificar las discontinuidades en evitables e inevitables, ¿cómo lo harías? Fíjate que para "reparar" la discontinuidad en algunos casos bastaría con modificar un punto, pero en otros habría que "mover" media función. ¿Dónde está la diferencia?

Efectivamente, en el límite.

Si el límite existe, pero o no hay imagen o no coincide con él, la discontinuidad se llamará EVITABLE. Pero si no existe límite, haya o no imagen, la discontinuidad se dirá INEVITABLE.

- **TIPOS DE DISCONTINUIDAD**
  - **EVITABLE**
    $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero o $\nexists$ f(a) o es distinto al límite
  - **INEVITABLE**
    $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$
    - **DE PRIMERA ESPECIE**
      Límites laterales distintos
      - **SALTO FINITO**
        Límites laterales finitos
      - **SALTO INFINITO**
        alguno de los laterales igual a ∞
    - **DE SEGUNDA ESPECIE**
      No existe alguno de los límites laterales

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4}$, estudia la continuidad en los puntos x= 0, 2 y -2.

A) En x=0 analizamos las tres condiciones:

1) $f(0)= 1$ existe imagen
2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4} = 1$ existe límite
3) $f(0)= \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ son iguales

luego la función es continua en x=0.

B) En x=2 1) $f(2)= \dfrac{0}{0}$ no existe, luego la función no es continua en x=2. Para conocer el tipo de discontinuidad necesitamos saber si existe o no límite.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminación) $= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, la función presenta una discontinuidad evitable en x=2.

El factor (x-2) no se podría simplificar al hallar la imagen f(2) porque, en ese caso, x sería exactamente 2 y el factor tomaría el valor 0. Sabemos que no se puede simplificar el 0. Sin embargo, en el límite, x toma valores muy próximos a 0 pero ninguno igual, luego el factor x-2 no es 0 y se puede simplificar. Eso hace que haya límite pero no imagen.

C) En x=-2 1) $f(-2)=\frac{-8}{0}=-\infty$ no existe. Veamos el tipo de discontinuidad:

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x-4}{x^2-4}=\frac{-8}{0}$ indet. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{2x-4}{x^2-4}=\frac{-8}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{2x-4}{x^2-4}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$$

como son distintos no hay límite.

luego en x=-2, la función presenta una discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

Representa gráficamente el resultado del límite y verifica que se produce un salto infinito.

Veamos lo que ocurre en una función a trozos:

Ejemplo:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x & x<3 \\ 3x+2 & x\geq 3\end{cases}$ estudia la continuidad en x=1,3.

A) En x=1 , analizamos las tres condiciones: 1) $f(1)=2\cdot 1=2$ existe imagen

2) $\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$ existe límite

3) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$ son iguales

f(x) es continua en x=1

B) En x=3, 1) $f(3)=3\cdot 3+2=11$

2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(3x+2)=11 \\ \lim\limits_{x\to 3} 2x=6\end{cases}$ no existe límite

f(x) presenta en x=3 una discontinuidad inevitable de primera especie de salto finito.

¿Crees que esta función podría tener otros puntos de discontinuidad además de x=3?

Suponiendo que tuvieras que analizar en qué puntos no es continua una función de la que conoces su expresión analítica ¿en qué puntos te fijarías? Razónalo tanto si es una función a trozos como si su expresión es única.

Para pensarlo, averigua cuáles son los puntos que pueden incumplir alguna de las tres condiciones de continuidad.

Actividades

7. Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ en los puntos x=-1, x=0 y x=1.

8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos y especifica el tipo de discontinuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 & -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 - 2x & x < 2 \\ x - 2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & x < 0 \\ 4^x & x \geq 0 \end{cases}$

9. Indica el valor de k para el que la función $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 2 \\ 3x + k & x \geq 2 \end{cases}$

sea continua en todo R.

EJERCICIOS Y CUESTIONES. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

1. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos indicados. Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2, 1, 2 **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ en 0, 1

2. Calcula el límite cuando $x \to \infty$ de las funciones y representa los resultados obtenidos.

a) $f(x) = -x^2 + 7x + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{2}{5x}$ **c)** $f(x) = 2x - x^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2}{5}$

3. Calcula el límite cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{3 - x^4}{1 + x^4}$ **d)** $f(x) = -2x^5 + 5x^3 - x + 1$

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < -2 \\ x^2 & -2 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$ calcula:

a) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ j) f(-2)

k) f(1) l) f(-1) m) f(7)

Comprueba los resultados obtenidos realizando la representación gráfica.

5. Calcula los siguientes límites: (Tipo $0 \cdot \infty$)

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 \cdot \dfrac{2x}{3x^4 - 2} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x - 1}{5} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{x - 1}} \right)$

6. Calcula los siguientes límites: (Tipo 1^∞)

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2 + 3} \right)^x$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2 + 3x}{3x - 1} \right)^{3x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 1} \right)^{2x}$

7. Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{x^2-5x+4}-\frac{7}{x-1}\right)$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+3x}-x\right)$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3x^2}\right)$

4) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x^2-5x+6}-\frac{5}{x-3}\right)$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7x}\right)$

6) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$

8) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1+\sqrt{1+x}}{x}\right)$

9) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

11) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^2-9}$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

13) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$

15) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

17) $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x-3x^3}{x^2+x^3-4}$

18) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{2x}$

8. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$; f(2)=5; Dom(f)=R; Im(f)=(-2,+∞)

b) $\lim_{x\to 1} g(x) = 4$; g(x) estrictamente creciente en $(-\infty,1)$; Im(g)=$(-\infty,4]$

c) $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 3$; $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 5$; h(2)=4 ; Dom(h)=$[0,3]$

d) $\lim_{x\to -1} t(x) = 4 = \lim_{x\to 0} t(x) = \lim_{x\to 1} t(x)$

e) $f(x) > 0\ \forall x > 2$; $f(x) \le 0\ \forall x < 2$; $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

f) Dom(f) = R - $(2,3]$; Imf = R; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -2$; f(0)=0

****Indica siempre el tipo de discontinuidad, si ésta se produce****

9. Estudia la continuidad en x=0 y $x=\sqrt{2}$ de la función $f(x) = \dfrac{5}{x^2-2}$

10. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 1 \\ x^2 & 1 < x < 3 \\ 3 & x \ge 3 \end{cases}$$ en los puntos x=1, x=3, x=0.

11. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 3 \\ 1-x & x \ge 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \le 0 \\ -x+1 & 0 < x < 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & x < 0 \\ 4^x & x \ge 0 \end{cases}$ **e)** $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$

**** Si puedes, dibuja las funciones para confirmar el resultado****

12. Indica el valor de k para el que la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 2 \\ 3x+k & x \ge 2 \end{cases}$ sea continua en todo R.

13. ¿Existe algún valor de k para el que la función $f(x) = \begin{cases} 5/x & x \ne 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ sea continua?

14. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Z \\ 0 & x \notin Z \end{cases}$

15. Calcula el límite cuando x tiende a 2 de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \ne 2 \\ 5x & x = 2 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 2 \\ 2 & x \ge 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 3-x & x > 4 \\ x+2 & x \le 2 \end{cases}$ **d)** $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & x < 3 \\ x^2 & x \ge 3 \end{cases}$

CUESTIONES

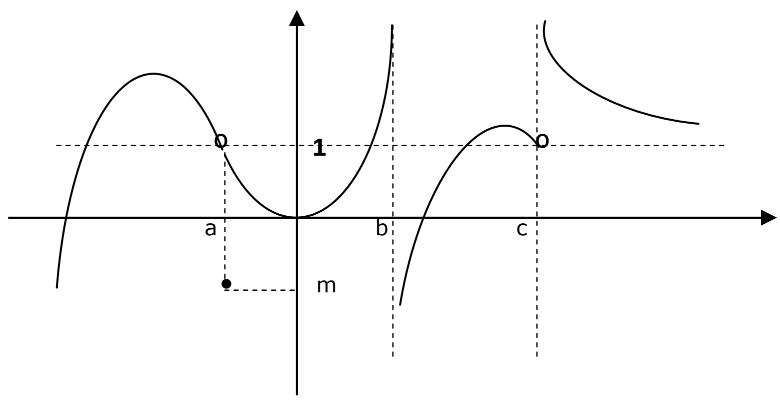
1. Si una función es estrictamente creciente en todo R ¿significa esto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$? Si no es así, pon un ejemplo que lo demuestre.

2. ¿Puede una función f tener como dominio $R-\{a\}$ y existir el $\lim_{x\to a} f(x)$? Si tu respuesta es afirmativa, pon un ejemplo.

3. ¿Puede una función ser continua en un punto x=a y no existir en dicho punto?

4. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

5. Sea la función F(x):



5.1 Señala la afirmación correcta:

a) F(a) = 1 **b)** F(0) = 1 **c)** F(c) = 1 **d)** F(c) no existe

5.2 Señala la afirmación correcta:

a) $\lim_{x\to a} F(x) = 1$ **b)** $\lim_{x\to c} F(x) = 1$ **c)** $\lim_{x\to c} F(x) = \infty$ **d)** $\lim_{x\to a} F(x) = m$

5.3 Señala la afirmación correcta:

a) $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 1$ **b)** F(0)=0 **c)** $\lim_{x\to b} F(x) = \infty$ **d)** F(b)=0

5.4 Señala la afirmación correcta:

a) $\lim_{x\to 0^-} F(x) = 1$ **b)** $\lim_{x\to b^-} F(x) = -\infty$ **c)** $\lim_{x\to c^-} F(x) = \infty$ **d)** $\lim_{x\to \infty} F(x) = 1$

5.5 Señala la afirmación correcta:

a) Si $x<0$, entonces $F(x)>0$
b) Si $x>c$, entonces $F(x)>1$
c) Si $0<x<b$, entonces $F(x)<0$
d) Si $b<x<c$, entonces $F(x)>1$

6. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ y $g(x) = x-2$, señala la afirmación falsa:

a) Si $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$, entonces $f(x) = g(x)$
b) $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} g(x)$
c) Si $x \in Dom(f)$, entonces $f(x) = g(x)$
d) Alguna de las afirmaciones anteriores es falsa.

7. ¿Cuál es el $\lim_{x\to 0} \sqrt{-x^2}$?

a) existe sólo por la izquierda
b) 0
c) es indeterminado
d) no existe.

8. La función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<2 \\ 2x-1 & x \geq 2 \end{cases}$, en $x=2$ es

a) continua, pues $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$
b) discontinua, pues $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$
c) discontinua, pues no existe f(2)
d) nada de los anterior es cierto.

9. Si $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$, entonces

a) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$
b) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$
c) f(1) no existe, pero $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$
d) f(1) no existe, pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

10. Tras un estudio demográfico se ha determinado que el número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función:

$f(x)= \frac{14.500x+7.200}{2x+1}$ donde x es el número de años transcurridos.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población en la actualidad?

b) ¿Cuántos tendrá dentro de un año? ¿Y dentro de dos?
c) Suponiendo que la función fuese válida hasta el final de los tiempos ¿crees que la población crecería indefinidamente o se estabilizaría en torno a un determinado número de habitantes? Justifica la respuesta.

Ampliación

1. $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+x-1}\right) = -\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}} = 0$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = 3$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+3x^2} - \sqrt{x^3+x^2}\right) = \infty$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6} - x\right) = -\frac{5}{2}$

6. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = -\frac{2}{5}$

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+6x^2-3x}{2x^2+5x} = -\frac{3}{5}$

9. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{3}{2}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-4x^2+2x}{x^3-x^2-x+1} = 1$

11. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} = 0$

12. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} =$ No existe

13. $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{x^3+3x^2+3x+2} = -\frac{1}{3}$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right) = 0$

15. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} =$ No existe

16. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1$

17. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\frac{1}{56}$

18. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$

19. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = -\frac{3}{2}$

20. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25} =$ No existe

21. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = -2$

22. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-2}\right) =$ No existe

UNIDAD DIDÁCTICA 9

DERIVADAS

1º BACHILLER

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

1. Interpretar geométricamente el concepto de derivada de una función en un punto.
2. Hallar la derivada de una función en un punto mediante la definición.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado.
4. Determinar, mediante el cálculo de derivadas laterales, la derivabilidad de una función en un punto.
5. Derivar operaciones de funciones (suma, resta, multiplicación, división y composición).
6. Encontrar las derivadas sucesivas de una función.

CONCEPTOS

1. Derivada de una función en un punto: concepto, interpretación geométrica y definición.
2. Función derivada. Derivadas laterales.
3. Derivadas sucesivas.
4. Cálculo de derivadas.
5. Derivadas de operaciones con funciones.
6. Ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.

DERIVADAS

1. INTRODUCCIÓN:

El estudio de las funciones y curvas dio lugar al nacimiento de una nueva rama de las matemáticas: el Cálculo Infinitesimal o Análisis Matemático. Su origen estuvo relacionado con la resolución de dos problemas: el movimiento no uniforme y el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera de ella (nos centraremos en este último).

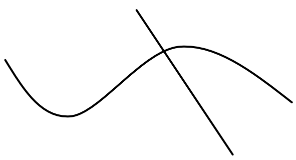
Ambos problemas fueron resueltos separadamente por el matemático inglés **Isaac Newton** (1642-1727) y por el matemático y filósofo alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), que protagonizaron una agria disputa por la paternidad del descubrimiento, que hoy en día se otorga a ambos.

Newton descubrió el método de las tangentes (lo que hoy se conoce como derivación) entre 1665 y 1666 pero lo publicó en 1693, mientras que Leibniz, que lo descubrió más tarde, entre 1675 y 1677, lo publicó antes, en 1684.

Posteriormente, matemáticos como **Euler, Gauss y Cauchy** desarrollaron el Cálculo Infinitesimal hasta convertirlo en una de las ramas más potentes de las matemáticas.

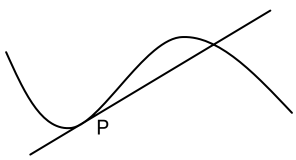
El problema de *la tangente a una curva en un punto*, es decir, *la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de la curva en cada instante*, es el eje sobre el que se asientan numerosos conceptos matemáticos y físicos como la velocidad de un móvil, las trayectorias de los satélites o el estudio de los extremos de una función de cara a su optimización.

Empezaremos por revisar qué se entiende por recta tangente a una curva en un punto. Si afirmamos que se trata de "la recta que corta a la curva en ese punto", probablemente estarás de acuerdo, porque coincide con la idea que **ya** tienes formada sobre dicha recta. Pero recuerda que para identificar el concepto es necesario precisar bien las palabras.

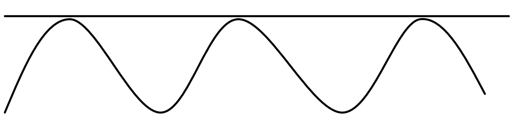


Esta recta corta a la curva en un punto y no es tangente en él.

Sin embargo, en el siguiente gráfico se podría asegurar que la recta es tangente en el punto P, a pesar de cortar a la curva en más de un punto.



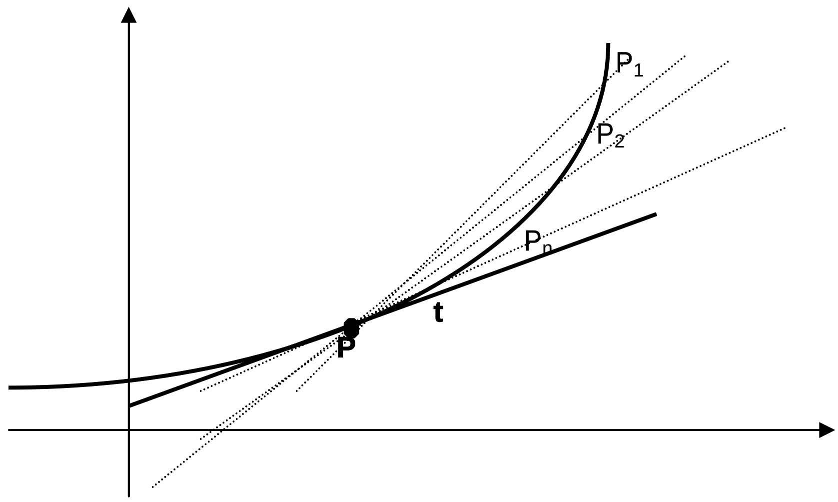
De hecho, puede ser tangente en más de un punto a la vez:



Ya sabes que el leguaje matemático se caracteriza por su capacidad para definir con el máximo rigor y precisión cualquier concepto. Aunque a veces, como en este caso, la tarea resulta compleja.

(***Las matemáticas son precisas, concisas e incisas y no confusas, profusas ni difusas*** ¿Qué te parece esta frase?)

La recta tangente va a ser definida como una recta límite de otras rectas. Observa el dibujo:



Si trazamos una secante que pase por el punto P y otro cualquiera P_1 de la curva y movemos P_1 acercándolo a P, la recta secante cambia de posición. De manera que a medida que P_1 tiende a P, la secante tiende a estabilizarse en torno a una recta límite que será la recta tangente.

(Hacer el límite cuando $P_1 \to P$ permite que siempre dispongamos de dos puntos, por muy próximos que estén, para trazar la recta secante. Pues P_1 siempre será distinto de P).

Ya podemos hacer la definición de recta tangente. Utilizaremos la ecuación punto-pendiente por ser éstos los datos de que disponemos.

<u>Definición</u>:

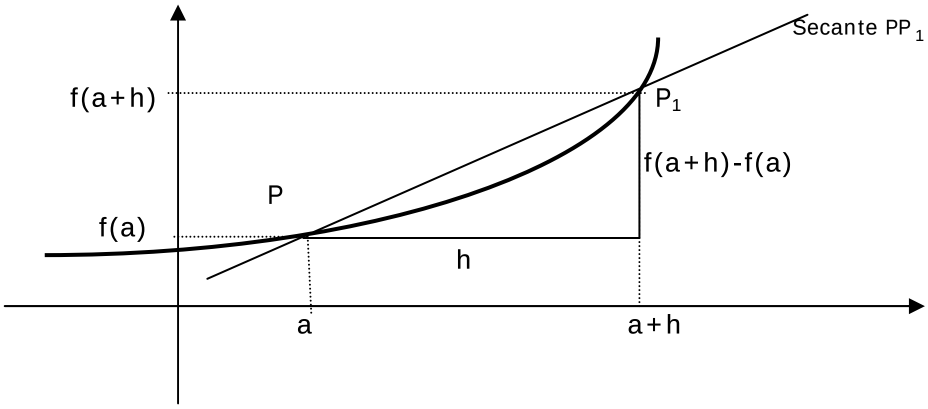
Llamamos **recta tangente** a la curva f(x) en el punto P a la recta que pasa por el **punto** P y tiene por **pendiente**, el límite de las pendientes de las secantes trazadas por P y otro punto cualquiera P_1 de la curva, cuando P_1 tiende a P.

La pendiente de las rectas PP_1, PP_2 ... PP_n se va modificando y, en el límite, se convierte en la pendiente de la tangente. Este concepto será lo que llamemos derivada.

Por tanto, entenderemos por **derivada** de una función f(x) en un punto P, **la pendiente de la recta tangente** a esa curva en dicho punto P.

Trataremos de escribir matemáticamente todos estos conceptos.

Designamos unas coordenadas a P y P_1: P (a,f(a)) y P_1 (a+h, f(a+h))



Escribimos la ecuación de la tangente en forma punto-pendiente:

- Punto P(a, f(a))
- Pendiente $m_{tg} = \lim\limits_{P_1 \to P} (m_{sec})$

$$\boxed{y - f(a) = m_{tg} \cdot (x - a)}$$

Para hallar m_{tg}, calculamos primero las pendientes de las secantes. Para ello consideramos el vector $\overrightarrow{PP_1}$:

$$\overrightarrow{PP_1} = (a+h-a,\ f(a+h)-f(a)) = (h,\ f(a+h)-f(a))$$

$$m_{sec} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow m_{tg} = \lim_{P_1 \to P} (m_{sec}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Intenta razonar por qué cambiamos $P_1 \to P$, por $h \to 0$

Luego la ecuación de la recta tangente a la curva f(x) en el punto x=a será:

$$\boxed{y - f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x - a)}$$

Definición:

Se llama **derivada de f(x) en el punto x=a**, y se escribe $f'(a)$, al siguiente límite:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

que representa geométricamente, la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en ese punto x=a.

Ejemplo: **Calcula la derivada (pendiente de la tangente) de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x=3$.**

Sabemos que $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

De esta manera, podríamos calcular la pendiente de la tangente en cada punto realizando el límite correspondiente. Pero si usamos un punto genérico x calcularemos todas esas pendientes en un único límite.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Por supuesto, si $f'(x)=2x$, entonces $f'(3)=6$, $f'(-1)=-2$, $f'(7)=14$ ...

Actividades

1. A partir de la definición de derivada, calcula f'(1) y f'(0), siendo $f(x)=2x^2-1$. Calcula, de la misma manera, la expresión general de f'(x).

2. Calcula, a través de la definición, f'(0) y f'(2) siendo

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 2x & x\geq 0\end{cases}$$

2. DERIVADAS LATERALES. FUNCIÓN DERIVADA

Hemos visto que la derivada de una función f en un punto x=a, si existe, es f'(a) y viene dada por:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Si f' (a) es un número real, entonces f es **derivable** en a. En caso contrario, si no existe el límite, la función no es derivable en a.

Sabemos que no existe límite cuando son distintos los límites laterales. Lo que nos lleva a definir las derivadas laterales.

a) Derivada lateral por la izquierda de f en x=a:

$$\boxed{f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Gráficamente indica que se elige P_1 a la izquierda de P, por lo que h será siempre negativo y tanto más pequeño cuanto más se acerque P_1 a P.

b) Derivada lateral por la derecha de f en x=a:

$$\boxed{f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Igualmente, la derivada por la derecha indica la elección de P_1 a la derecha de P.

Diremos que f es derivable en x=a si existen las derivadas laterales y coinciden

$$\boxed{f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)}$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x & x < 2 \end{cases}$ ¿Existe $f'(2)$?

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} (4+h) = 4$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 + h - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h - 2}{h} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Por ser distintas las derivadas laterales, f(x) no es derivable en x=2.

Dibuja la función y comprueba los resultados obtenidos.

Actividad

3. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 1 \\ 2x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ Halla f'(x).

Podemos hallar la derivada en un punto determinado x=a. Pero si queremos calcular la derivada de f en varios puntos, será preferible calcular f' en un punto genérico x, y luego particularizar a los puntos deseados.

Se deduce, por tanto, que f'(x) es, a su vez, una función que asocia cada punto x con la pendiente de su tangente.

Si f es derivable en un intervalo de R, **la función derivada de f** es la que a cada x del intervalo le hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Esta función se designa por:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Una función f es derivable en un intervalo si lo es en cada punto del intervalo.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \frac{5}{x}$, calcular $f'(1)$ y $f'(2)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{5}{x+h}-\frac{5}{x}}{h}\right) = \lim_{h\to o}\left(\frac{\frac{5x-5\cdot(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{5x-5x-5h}{(x+h)\cdot x}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{-5h}{(x+h)\cdot x}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-5h}{(x+h)\cdot x\cdot h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-5}{(x+h)\cdot x}\right) =$$

$$\frac{-5}{(x+0)\cdot x} = \frac{-5}{x\cdot x} = \frac{-5}{x^2} \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{-5}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{-5}{1^2} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$f'(2) = \frac{-5}{2^2} = \frac{-5}{4}$$

Si agrupamos las funciones en familias: potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas... y calculamos la derivada de cada una en un punto genérico x, llegaremos a las fórmulas que aparecen a continuación y que, una vez aprendidas, evitarán que tengamos que realizar el límite en cada caso concreto.

3. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIONES	FUNCIÓN SIMPLE	FUNCIÓN COMPUESTA	*EJEMPLOS*
F. Constante	$y = k$ $y' = 0$		
F. Identidad	$y = x$ $y' = 1$		
F. Potencial	$y = x^a$ $y' =$	$y = f^a$ $y' = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$	$y = (x^3+3)^7$ $y' = 7 \cdot (x^3+3)^6 \cdot 3x^2$
F. Exponencial	$y = a^x$ $y' =$	$y = a^f$ $y' = a^f \cdot Lna \cdot f'$	$y = 5^{\sqrt{x+1}}$ $y' = 5^{\sqrt{x+1}} \cdot Ln5 \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$
(caso particular a = e)	$y = e^x$ $y' =$	$y = e^f$ $y' = e^f \cdot f'$	$y = e^{2x^2}$ $y' = e^{2x^2} \cdot 4x$
F. Logarítmica	$y = \log_a x$ $y' =$	$y = \log_a f$ $y' = \frac{f'}{f \cdot Lna}$	$y = \log_3(4x+2)$ $y' = \frac{4}{(4x+2) \cdot Ln3}$
(caso particular a = e)	$y = Lnx$ $y' =$	$y = Lnf$ $y' = \frac{f'}{f}$	$y = Ln\,3^{x+5}$ $y' = \frac{3^{x+5} \cdot Ln3}{3^{x+5}} = Ln3$
F. Potencial- Exponencial		$y = f^g$ $y' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot Lnf \cdot g'$	$y = x^{Lnx}$ $y' = Lnx \cdot x^{Lnx-1} + x^{Lnx} \cdot Lnx \cdot \frac{1}{x}$
F. Seno	$y = sen\,x$ $y' =$	$y = sen\,f$ $y' = cos\,f \cdot f'$	$y = sen\,(2^x+3)$ $y' = cos\,(2^x+3) \cdot 2^x \cdot Ln2$
F. Coseno	$y = cos\,x$ $y' =$	$y = cos\,f$ $y' = -\,sen\,f \cdot f'$	$y = cos(6x+3)$ $y' = -\,sen(6x+3) \cdot 6$
F. Tangente	$y = tg\,x$ $y' =$	$y = tg\,f$ $y' = \frac{f'}{cos^2 f}$	$y = tg\,(2x)$ $y' = \frac{2}{cos^2(2x)}$
F. Cotangente	$y = cotg\,x$ $y' =$	$y = cotg\,f$ $y' = -\frac{f'}{sen^2 f}$	$y = cotg(senx)$ $y' = -\frac{cos\,x}{sen^2(senx)}$
F. Arco seno	$y = arcsen\,x$ $y' =$	$y = arcsen\,f$ $y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$y = arcsen(e^x)$ $y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
F. Arco coseno	$y = arccos\,x$ $y' =$	$y = arccos\,f$ $y' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$y = arccos(7x+1)$ $y' = -\frac{7}{\sqrt{1-(7x+1)^2}}$
F. Arco tangente	$y = arctg\,x$ $y' =$	$y = arctg\,f$ $y' = \frac{f'}{1+f^2}$	$y = arctg\,(senx)$ $y' = \frac{cos\,x}{1+sen^2 x}$

La función simple es un caso particular de la función compuesta cuando f(x) =x.
Completa la tabla basándote en las fórmulas de la función compuesta.

Actividades

4. Calcula las siguientes derivadas:

a) $f(x) = 4x^7$ **b)** $f(x) = 2x^{-5}$ **c)** $f(x) = (2x+1)^6$

d) $f(x) = 4x^{\frac{-1}{3}}$ **e)** $f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ **f)** $f(x) = 3x^{\frac{-1}{3}}x^5$

g) $f(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{x^2}$ **h)** $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ **i)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

5. Calcula las siguientes derivadas:

a) $f(x) = e^{4x}$ **b)** $f(x) = e^{3-x^2}$ **c)** $f(x) = 2^{x^2+1}$

d) $f(x) = 3^x \cdot 5^x$ **e)** $f(x) = \dfrac{7^{x^2} - 2x}{6^{x^3} + 3x^3}$

6. Calcula las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \dfrac{Lnx}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{e^x}{Lnx}$

c) $f(x) = 2^{5x^2-7}$ **d)** $f(x) = e^{\frac{3x}{2x+1}}$

e) $f(x) = \dfrac{3^{5x-6}}{\log_3(x^2+7)}$ **f)** $f(x) = (2x^3 - 5x + 7) \cdot e^{\ln(5x-2)}$

7. Calcula las siguientes derivadas:

a) $f(x) = sen(4x)$ **b)** $f(x) = 4senx$

c) $f(x) = sen\left(\dfrac{x}{4}\right)$ **d)** $f(x) = tg(x^4)$

e) $f(x) = \cos^3(5x+2)$ **f)** $f(x) = \cos(2^{3x-1})$

g) $f(x) = arcsen(2x^2 - 5x + 2)$ **h)** $f(x) = \arccos(\ln 2x)$

i) $f(x) = arctg(sen(3x-1))$ **j)** $f(x) = tg(\log_3(3x-1))$

8. Halla $f^{V}(0)$ si $f(x) = e^x$

4. DERIVADAS SUCESIVAS

Sabemos que f es derivable en un intervalo si lo es en cada punto del intervalo. Por lo tanto podemos hallar su función derivada, $f'(x)$. Como $f'(x)$ es a su vez una función, puede ser de nuevo derivable, y podremos hallar su derivada $(f')' = f''$, llamada derivada de segundo orden o derivada segunda y así sucesivamente, siempre y cuando la derivada obtenida sea derivable. De esta manera podemos calcular las derivadas sucesivas de la función f: $f', f'', f''', f^{IV}, f^{V} \ldots, f^{n)}, \ldots$

Ejemplo:

Hallar $f^{n)}(x)$, siendo $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f^{'V}(x) = 0 \Rightarrow f^{n)}(x) = 0 \text{ para } n \geq 4$$

Actividad

9. Dada la función $f(x) = -3x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 5$ halla: $f(0)$, $f'(1)$, $f''(-1)$, $f'''(2)$, $f^{IV}(0)$ y $f^{V}(1)$.

5. OPERACIONES CON DERIVADAS

Derivada de la suma

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivada del producto

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivada del producto de una función por un escalar

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

Derivada del cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivada de la composición (Regla de la cadena)

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

$f(x) = \mathrm{sen}x^2$, calcular su derivada. Aplicamos la regla de la cadena donde $g(x) = x^2$, y $f(x) = \mathrm{sen}x$. Se tiene:

$$\left(\mathrm{sen}x^2\right)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

6. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

La ecuación de la recta tangente a la curva y = f (x) en el punto x = a, en su forma punto-pendiente, es:

$$\boxed{y - f(a) = f\,'(a) \cdot (x - a)}$$

Ya que la pendiente de la tangente en ese punto coincide con la derivada.

Ejemplo:

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 5$ en el punto x = 2:

$f\,'(x) = 6x \Rightarrow f\,'(2) = 6 \cdot 2 = 12 = m$

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 = 12 - 5 = 7$

Luego la ecuación será: $y - 7 = 12(x - 2)$

Actividades

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=-x^2+3x-1$ en el punto de abscisa x= 2.

11. a) ¿En qué punto la derivada de la función $y=x^2-2x$ es igual a 2?
b) ¿En qué punto la recta tangente a la función anterior es paralela al eje X? ¿Y paralela a la recta y = 4x+1?

12. La ecuación de la recta tangente a una función f(x) en el punto x=1 es x- 2y+3=0. Halla f(2) y f'(2).

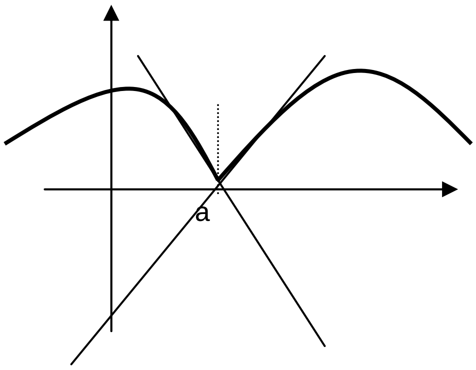
13. Halla la ecuación de la recta tangente en el punto x = - 2 a la función $f(x) = 3x^3 - 5$.

14. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = -4x^3 + 7x - 5$ en el punto x = - 3.

7. FUNCIONES NO DERIVABLES

En aquellos puntos donde la función es discontinua no es derivable pues no tiene sentido hablar de la recta tangente en esos puntos.

Sin embargo, existen puntos donde la función es **continua y** no es **derivable:** son los puntos angulosos. En estos puntos son diferentes las rectas tangentes por la izquierda y la derecha. Es decir, el hecho de que P_1 tienda a P por la izquierda o derecha da lugar a dos rectas tangentes distintas, lo que impide que exista derivada.



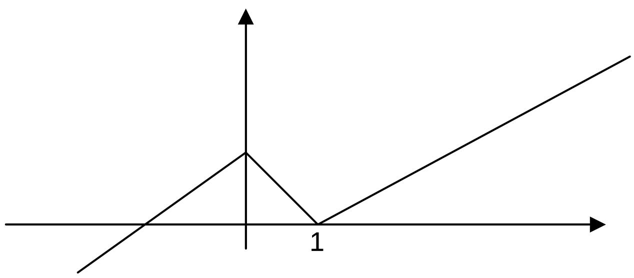
Esta función es continua en el punto a, pero no es derivable en él.

Piensa en la relación entre continuidad y derivabilidad. Razona, con ejemplos, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- ***a)*** *continua $\Rightarrow$ derivable, ,*
- ***b)*** *derivable $\Rightarrow$ continua,*
- ***c)*** *se cumplen ambas*

Actividades

15. Indica en qué puntos no es derivable y razona por qué, la función:



16. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & x < 1 \\ 5x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$, halla el valor de a para que la función sea derivable entonos los puntos. Calcula f' en ese caso.

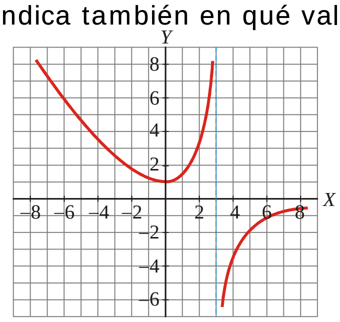
EJERCICIOS Y CUESTIONES. DERIVADAS

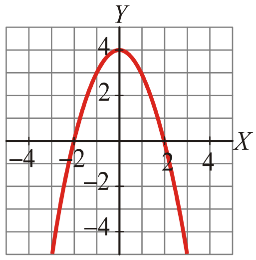
1. Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = 2x^2 - x + 3$ en el punto $x=-1$.

2. Dada la función $y=3x-2$ halla, mediante la definición, f'(x).

3. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=\frac{1}{x}$ que son paralelas a la recta $x+4y=0$.

4. Indica en estas funciones los valores de x en los que f' es positiva o negativa. Indica también en qué valores de x, f' es 0.





¿Cómo es la función f en los valores de x donde f' es positiva? ¿Y negativa? ¿Cómo se llaman los puntos donde f' es 0?

5. Calcula las siguientes derivadas:

1. $f(x) = 4x^7$ **2.** $f(x) = 2x^5$ **3.** $f(x) = (2x+1)^6$

4. $f(x) = 4x^{\frac{-1}{3}}$ **5.** $f(x) = x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}$ **6.** $f(x) = 3x^{\frac{-1}{3}}x^5$

7. $f(x) = \frac{5\sqrt{x}}{x^2}$ **8.** $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ **9.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

10. $f(x) = (x^4+3)^{\frac{-2}{3}}$ **11.** $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$ **12.** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{-1}{2}}x^{\frac{3}{4}}$

13. $f(x) = \frac{(x^2-3x)^{-3}}{\sqrt{x}}$ **14.** $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$ **15.** $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+2)^3}$

16. $f(x) = e^{4x}$ **17.** $f(x) = e^{3-x^2}$ **18.** $f(x) = 2^{x^2+1}$

19. $f(x) = 3^x\cdot 5^x$ **20.** $f(x) = \frac{7^{x^2}-2x}{6^{x^3}+3x^3}$ **21.** $f(x) = \frac{Lnx}{\sqrt{x}}$

22. $f(x) = \frac{e^x}{Lnx}$

6. ¿En qué punto de la parábola $y = x^2-x$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

7. Dada la función $y = 2x^2 + ax + b$, halla a y b para que la función tenga una tangente de pendiente -6 en el punto (1,4).

8. Comprueba que la función $y = |x|$ no es derivable en el punto $x=0$, hallando las derivadas laterales.

9. **a)** Hallar $f^{V}(0)$ si $f(x) = e^x$

b) Halla $f^{VI}(-1)$ si $f(x) = 2^x \cdot (3x+1)$

c) Halla $f^{n)}(x)$ si $f(x) = \log_2(3x)$

10. Halla la parábola $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por A(5,-2) y que es tangente a la recta $y = 2x+1$ en el punto B(2,5).

11. Calcula las siguientes derivadas:

1. $f(x) = 2^{5x^2-7}$

2. $f(x) = e^{\frac{3x}{2x+1}}$

3. $f(x) = \dfrac{3^{5x-6}}{\log_3(x^2+7)}$

4. $f(x) = (2x^3 - 5x + 7)\quad e^{Ln(5x-2)}$

5. $f(x) = 2^{\log_5 \; x^2-6}$

6. $f(x) = Ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

7. $f(x) = xLnx$

8. $f(x) = [Ln(2x^3 - 5x^2 - 4)]$

9. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

10. $f(x) = Ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$

11. $f(x) = \log_4(Ln(5x)) \cdot 4^{Ln(5x)}$

12. $f(x) = \dfrac{7x^3 - 3^{x^7}}{\log_3 x^3}$

13. $f(x) = (2x-3+8x^2)\cdot(3x-5x^2-4x^3)$

14. $f(x) = \dfrac{7^{2x}}{2^{7x}}$

12. Calcula las siguientes derivadas:

1. $f(x) = Ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$

2. $f(x) = \log_3(5x^2 - 3)$

3. $f(x) = e^{e^x}$

4. $f(x) = e^{x^x}$

5. $f(x) = x^{x^x}$

6. $f(x) = a^{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

7. $f(x) = sen2x^2$

8. $f(x) = tg^2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

9. $f(x) = Ln\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-\cos x}}$

10. $f(x) = arcsen^2\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$

11. $f(x) = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\frac{x}{a}$

12. $f(x) = \cot g\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

13. $f(x) = a^{\sqrt{\text{sen}x}}$

14. $f(x) = x^2 \cdot \arccos\frac{2}{x}$

15. $f(x) = (\text{arctg}x)^{\sqrt{x}}$

16. $f(x) = 3\text{sen}^2(2x+1)^3$

17. $f(x) = \text{Ln}\left(\cos^3(\text{Ln}x)\right)$

18. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)$

19. $f(x) = \left[(x^2-1)^{\text{sen}x}\right]^4$

20. $f(x) = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}2x))$

13. Mediante la definición, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 7x^2 - 6$ en $x = 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en $x = 2$

14. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 4x^2$ en $x = 1$, $x = 2$

b) $f(x) = \cos x$ en $x = \pi$

c) $f(x) = x^4 + 3$ en $x = -4$

d) $f(x) = 2x^3 - x + 3$ en $x = 0$, $x = 1$

e) $f(x) = 2x^5 + 6$ en $x = -1$

15. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \quad 3 & x > 3 \\ x \quad 5 & x \le 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 2 \\ x & x < 2 \end{cases}$

16. Halla $f^{VI}(-1)$ si $f(x) = 2^x$

17. Calcula las siguientes derivadas:

1) $f(x) = (x^4+3)^{\frac{-2}{3}}$

2) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{-1}{2}} x^{\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \frac{(x^2-3x)^{-3}}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$

6) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+2)^3}$

7) $f(x) = x^6$ **8)** $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$ **9)** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

10) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)^4$ **11)** $f(x) = (x^2 + 4)^4$ **12)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

13) $f(x) = \dfrac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}$ **14)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4}$ **15)** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}$

16) $f(x) = 4^{\frac{3}{x}}$ **17)** $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **18)** $f(x) = e^{2x^2} - e^x - 2$

19) $f(x) = 2^{x^2} \cdot 3^{x^2}$ **20)** $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{4}$ **21)** $f(x) = (e^{2x} + 1)^3$

22) $f(x) = \log_3 (x^2 + 7)$ **23)** $f(x) = \log_5 (3 - 4x^3)^5$ **24)** $f(x) = \mathrm{Ln}(e^x + 2)$

25) $f(x) = \mathrm{Ln}(2x^2 - 1) \cdot (x^2 - 2)$ **26)** $f(x) = \mathrm{Ln}(x^2 + 1)$

CUESTIONES

1. Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
b) su derivada es 0 en el punto (-2,1)
c) su derivada es 1 en el punto (0,1)
d) es continua en todos los puntos salvo en x=2 donde presenta una discontinuidad evitable.

2. ¿Cuál es el valor de la derivada en el vértice de una parábola? ¿Cómo calcularías dicho vértice? Calcúlalo en la parábola $y = x^2-2x+3$ y generaliza a $y = ax^2+bx+c$.

3. Pon tres ejemplos de funciones cuya derivada sea f'(x) = 2x.

4. ¿Por qué la derivada de una función f es, a su vez, una función? ¿Existe alguna función que tenga la misma derivada en todos los puntos? Razónalo con ejemplos.

5. Si una función no es continua en un punto ¿puede ser derivable en él?

6. Si una función es continua en un punto ¿es necesariamente derivable en él?

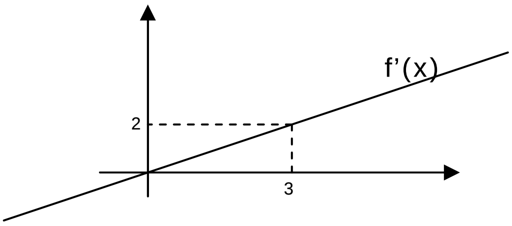
7. Verdadero o falso: **a)** Toda función continua en un punto, es derivable en él
b) Toda función derivable en un punto, es continua en él
c) Si f(x) no es continua en x=a, no es derivable en x=a
d) Si f(x) no es derivable en x=a, no es continua en x=a

8. Si una función es creciente en el intervalo (a,b) ¿de qué signo es la derivada en dicho intervalo?

9. ¿Puede la tangente a una curva en un punto cortar a dicha curva en otro punto?

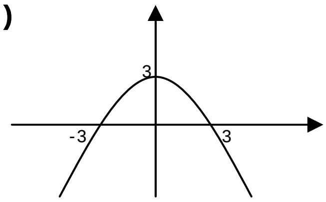
10. Si la recta tangente a una curva f(x) en un punto x=a es paralela al eje de abscisas ¿cuál es el valor de f'(a)?

11. La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de una función f:

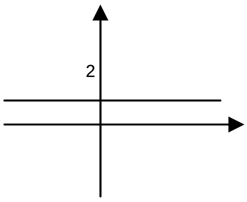


Razona cuál de las tres gráficas siguientes corresponde a la función f(x):

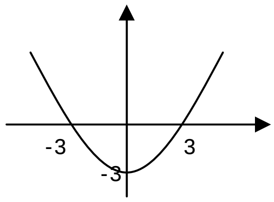
A)



B)



C)



12. La derivada de la función y=f(x) en el punto x=a es:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

c) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

d) ninguna de las expresiones anteriores

13. Razona cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) si f es continua en x=a, entonces es derivable en x=a
b) si f es derivable en x=a, entonces es continua en x=a
c) si f es derivable en x=a, entonces es creciente en x=a
d) si f no es derivable en x=a, entonces no es continua en x=a.

14. Si la función f(x) cumple f'(a)= -2, puede asegurarse que:

a) f es continua en a
b) f es creciente en a
c) f' es constante
d) nada de lo anterior.

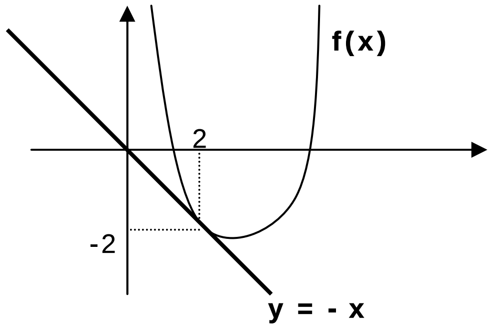
15. Si f es una función polinómica de tercer grado, se puede asegurar que:

a) f'''(x)=0
b) $f^{iv}(x)=0$
c) f''' es de primer grado
d) $f^{iv}(x)=k\neq 0$

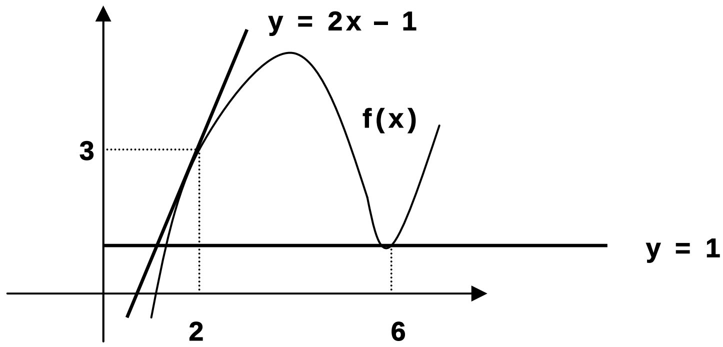
16. La función f(x) = |x|:

a) no es derivable en x=0 por no ser continua
b) es continua en x=0, pero no derivable en x=0
c) es derivable en x=0, pero no continua en x=0
d) tiene derivada nula en x=0.

17. Calcula en cada una de las siguientes funciones las derivadas que se indican:



Calcula $\mathbf{f'(2)}$



Calcula $\mathbf{f'(2)}$ $\mathbf{f'(6)}$

18. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la función.

b) La derivada del producto de una constante por una función es igual a la derivada de la función.

c) La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El origen de las matemáticas viene determinado por la necesidad de resolver problemas, tanto de la vida cotidiana como de carácter más técnico o abstracto. Por eso, con el estudio de las matemáticas no sólo pretendemos aprender conceptos que otros desarrollaron antes que nosotros, sino que aspiramos a desarrollar estrategias de pensamiento lógico que nos permitan enfrentarnos a problemas nuevos y aparentemente... ¿difíciles?

Los siguientes problemas pondrán a prueba nuestros conocimientos y capacidad de razonar pero, sobre todo, nuestra paciencia, nuestro gusto por los retos y nuestro valor para afrontarlos.

¡¡¡ No vale rendirse!!!

1.- Encontrar de forma razonada la última cifra del número N dado por

$$N = 3^{55505550555} + 55505550555$$

2.- Un agricultor tiene una finca de forma rectangular, uno de cuyos lados limita con un río. Si quiere vallar los tres lados restantes ¿cuál será el coste mínimo si se sabe que cada metro de valla vale 8 euros y la superficie de la finca es de 2000 metros cuadrados?

3.- El número $8^{16}-1$ es divisible por dos números comprendidos entre 51 y 100. ¿Cuáles son esos números?

4.- Dos hermanos gemelos, Ángel y Carlos, trabajan como ingenieros en una planta petrolífera. En uno de sus viajes por el desierto llevan cinco y tres panes respectivamente. Se encuentran con su amigo Borja, que es el director financiero de la planta, y que no tiene comida, pero tiene ocho monedas. Borja les propone compartir la comida a partes iguales y como recompensa les da las ocho monedas. ¿Cómo deben hacer Ángel y Carlos el reparto para que éste sea equitativo?

5.- Comprobar que para $n=5$, $n=7$ y $n=9$ se verifica que $n-1$ es múltiplo de 8. Justificar que $n-1$ es múltiplo de 8 para todos los números n, naturales, impares y mayores que tres.

6.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de ocho lados. ¿Qué ocurre si tiene diez lados?

7.- Hallar la última cifra de la expresión $2^{257}+5$

8.- David, Ignacio e Ibón son tres estudiantes de 2º curso de Bachillerato y compañeros de clase que tienen una afición común: el "surfing". Cierto día el socorrista de la playa les informa que la fuerza de las olas medida en newtons y en función del tiempo t en horas será la siguiente

$$F(t) = | 400 - 50t |$$

Si la fuerza de las olas es menor que 50 newtons entonces no se puede practicar este deporte porque el mar está demasiado en calma. Por otra parte, si la fuerza de las olas es superior a los 200 newtons las normas de seguridad impiden dicha práctica. Con los datos anteriores, si t va desde las 0 horas de un día hasta las 24 horas del mismo día ¿en qué horario puede practicarse el surfing?

9.- De dos números naturales M y N se sabe que M -1 y N -1 son múltiplos de cuatro. Demostrar que la diferencia de sus cuadrados $M^2 - N^2$, es múltiplo de ocho.

¿Ocurre necesariamente lo mismo si los dos números son pares? Razonar la contestación.

10.- Mikel sale con un montón de cromos y vuelve a casa sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con los cromos a lo que Mikel responde. A cada amigo que encontré le di la mitad de los cromos que tenía en ese momento más uno.

Su madre le pregunta que con cuántos amigos se ha encontrado y Mikel contesta que con cinco. ¿Cuántos cromos tenía Mikel al salir de casa?

11.- En una reunión hay un conjunto de personas, se saludan todas entre sí excepto una de ellas que únicamente saluda a cuatro personas.

Sabiendo que el número total de saludos es igual a 109, calcular el número de personas que se encontraba en la reunión.

12.- Una persona regala a sus sobrinos los libros de su biblioteca de forma que regala a cada sobrino 17 libros.

Además se sabe que si hubiese regalado al primer sobrino un libro, al segundo dos, al tercero tres y así sucesivamente también habría agotado su biblioteca.

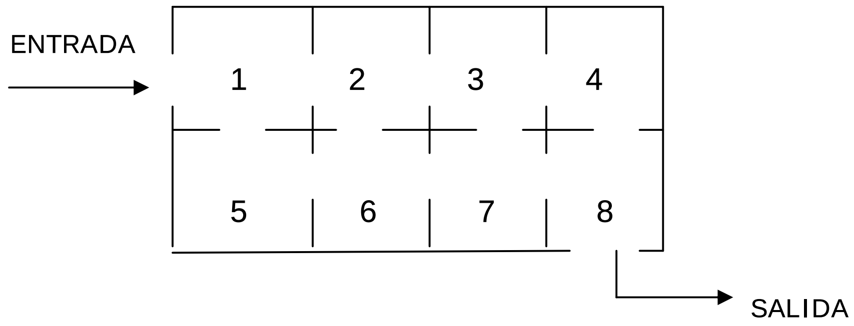
Calcular el número de sobrinos y el número total de libros.

13.- En la siguiente secuencia, di el número que ocupa el lugar 198:

1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1...

14.- Un grupo de amigos se junta para tomar una taza de café. La quinta parte del grupo toma, además, un pastel. A la hora de pagar le dan al camarero 1600 ptas. Si cada café cuesta 90 ptas. y cada pastel 70 ptas. ¿cuántas pesetas le dan de propina al camarero?.

15.- Aquí aparece el plano de un solar:



Un gato situado en la posición de entrada quiere llegar a la posición de salida. ¿Cuántos caminos diferentes tiene? (Se supone que no puede pasar dos veces por el mismo compartimento).

16.- Montse, Josu, Leire y Alberto son muy aficionados a pasarse tardes enteras jugando al parchís. Siempre juegan o bien dos o bien los cuatro. Pero si juegan dos, siempre uno es chico y otro es chica. Montse no puede jugar los martes, miércoles y sábados. Josu está libre los lunes, miércoles y jueves. Leire tiene que atender otras obligaciones los lunes y jueves, y Alberto puede jugar los lunes, martes y viernes. Los domingos no juegan nunca. Indica qué parejas juegan cada día y cuándo juegan los cuatro.

17.- El número de participantes de un desfile es tal que pueden desfilar formados de 3 en 3, de 5 en 5 y de 25 en 25, pero no pueden hacerlo de 4 en 4, ni de 9 en 9. ¿Cuál puede ser el número de participantes en el desfile si son más de 1000 y menos de 2000?.

18.- Un perro se encuentra atado con una cadena de 8 m. de longitud en una de las esquinas de una caseta cuadrangular de 4 m. de lado. Halla el área de la zona exterior por la cual se puede desplazar el perro.

19.- Una madre pasea con su hija. La madre da dos pasos al tiempo que la hija da tres. En un cierto instante ambas se dan cuenta que han coincidido pisando con el pie derecho. ¿Al cabo de cuántos pasos de la madre pisan por primera vez ambas al tiempo con el pie izquierdo?

20.- Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

21.- Una persona dio una vuelta a un campo de forma cuadrada. Por el primer lado caminó a 4 Km/h, por el segundo caminó a 5 Km/h, por el tercero trotó a 10 Km/h y por el cuarto corrió a 20 Km/h.

¿Cuál es la velocidad promedio de la vuelta completa?

22.- Se inscribe un cuadrado en un círculo de radio 1. Calcular el área comprendida entre la circunferencia y el cuadrado.

23.- Si la base de un triángulo aumenta el 10% y la altura disminuye en un 10% ¿variará el área del triángulo original?, en caso afirmativo señalar el porcentaje de aumento o disminución.

24.- Por la venta de una partida de sellos, todos del mismo valor, un señor obtuvo 5'27 euros. El precio de cada sello es inferior a 20 céntimos. ¿Cuántos sellos vendió? ¿Cuál es el valor de cada sello?

25.- Un número se dice capicúa si se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo 121 es un número capicúa.

a) Calcula cuántos números de cinco cifras son capicúas.
b) ¿Cuántos de ellos son mayores que 56266?

26.- Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentidos opuestos se encuentran cada 10 segundos, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos.

¿Cuál es la velocidad de cada ciclista? Se sabe que la pista tiene una longitud de 170 metros.

27.- En el interior de dos cajas hay repartidas monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos de euro. En total hay 1600 monedas y su valor es de 440 euros. La primera caja contiene únicamente monedas de 10 y 20 céntimos. La segunda caja contiene sólo 500 monadas de 50 céntimos.

¿Cuántas monedas hay de cada clase?

28.- Demuestra que la expresión $n^3 - 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6 para cada número natural n.

29.- En una carrera de motocicletas tres salen simultáneamente. La segunda hace 15 kilómetros por hora menos que la primera y 3 kilómetros por hora más que la tercera., y llaga 12 minutos después a la meta que la primera y 3 minutos antes que la tercera. Determinar:

a) La distancia de la carrera
b) La velocidad de cada motocicleta.

30.- A una velada de baile asistieron un total de 20 personas. La primera chica bailó con 7 muchachos, la segunda con 8 y así sucesivamente, hasta la última que bailó con todos los muchachos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?