APROXIMACIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

1. APROXIMACIONES

Al expresar un número real con muchas o infinitas cifras decimales, utilizamos expresiones decimales aproximadas, es decir, recurrimos al redondeo. Al realizar estas aproximaciones cometemos errores.

Cuando utilizamos los números decimales para expresar mediciones concretas, se deben dar con una cantidad adecuada de cifras significativas.
Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Sólo de deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.
El error absoluto suele ser menor que 5 unidades del lugar siguiente al de la última cifra significativa utilizada.
El error relativo es tanto menor, cuanto más cifras significativas se utilicen.

Al trabajar con cantidades, en la vida real y en la mayoría de las aplicaciones prácticas, se utilizan aproximaciones.

- **Ejemplos :**

  - Sería absurdo decir que la capacidad de un pantano es 42.509.786 mil litros (8 cifras significativas). Es más razonable decir que tiene 42.500 millones de litros.
  - Los presupuestos del estado se suele expresar en billones: 26,85 billones (4 cifras significativas)
  - El número π es un número irracional. Su valor es 3,141592653589793238... Como trabajar con ese valor, a la hora de hacer cálculos, es imposible, suele tomarse un valor aproximado, que unas veces es 3,14 y otras, 3,1415.
  - Lola ha calculado que la altura de un edificio son las dos terceras partes de otro que mide 50 m. Al realizar los correspondientes cálculos matemáticos, obtiene una altura de $2/3 \cdot 50 = 33{,}333...$m. En la práctica, esta expresión decimal ilimitada se sustituye por un número decimal lo más sencillo posible, por ejemplo, 33,3 m o 33,33 m, dependiendo del grado de precisión exigido.

En el primer caso estamos dando una aproximación por defecto y en el segundo caso una aproximación por exceso.

Se **aproxima** un número cuando no se toman todas sus cifras o se sustituyen por ceros.

Una **aproximación** lo es **por defecto** cuando resulta que es menor que el valor exacto al que sustituye y **por exceso** cuando es mayor.

- **Ejemplos :**

Dar una aproximación con tres decimales por defecto y otra por exceso de la fracción $\frac{12}{7}$.

Si pasamos a la forma decimal de dicha fracción obtenemos que $\frac{12}{7} = 1{,}714285714\ldots$

- Una aproximación por defecto es 1,714
- Una aproximación por exceso es 1,715

Una aproximación o valor aproximado de un número consiste en sustituirlo por otro próximo a él. Para ello se utilizan dos procedimientos: el redondeo y el truncamiento.

Para **redondear** un número entero o decimal hasta un orden n se ponen las cifras anteriores a dicho orden n, si la cifra siguiente es mayor o igual a 5 se aumenta a una unidad y en caso contrario se mantiene, sustituyendo las cifras que vienen a continuación de la de orden n por ceros.

- **Ejemplos:**

Si queremos redondear el número 238 a las decenas observamos que la cifra siguiente (8) es mayor que 5, por tanto, reemplazamos el 3 por un 4 y completamos la siguiente por un cero. El número 238 redondeado hasta la decena es 240.

Igualmente podemos hacer con los números decimales:

- 13,25 redondeado a las décimas es 13,3.
- 12, 513333... redondeado a las centésimas es 12,51
- 2,645751... redondeado a las milésimas es 2,646.

El **truncamiento** hasta un orden n es sustituir las cifras que hay a continuación por ceros. Así, el número 428 truncado a las decenas es 420 y hasta las centenas es 400.

- **Ejemplos:**

Con los números decimales podemos decir:

- 13,25 truncado a las décimas es 13,2
- 12,513333... truncado a las centésimas es 12,51
- 2,645751... truncado a las milésimas es 2,645

Observa que el truncamiento no siempre proporciona la aproximación más exacta de un número con la cantidad de cifras deseadas, por lo que es preferible redondear.

Se llaman **cifras significativas** de un número a aquellas que se utilizan en la aproximación, contando desde la primera cifra no nula hasta la cifra redondeada.

El orden de la última cifra significativa de un número aproximado se dice que es su orden de aproximación.

- **Ejemplo 1:**

En las aproximaciones del ejemplo anterior, tenemos:

Aproximación	Nº de cifras significativas	Orden de aproximación
13,2	3	Décimas
12,51	4	Centésimas
2,645	4	Milésimas

Error absoluto y cotas de error en una aproximación

Al usar las aproximaciones decimales, se simplifican los cálculos y los resultados, pero se pierde precisión y exactitud. Por eso conviene señalar el error cometido dando una cota del mismo.

En el ejemplo inicial al escoger como altura del edificio el valor 33,3 se da una aproximación de la altura real cometiendo un error menor que una décima.

Llamamos **error absoluto** de una aproximación a la diferencia en positivo entre el valor real y el valor aproximado.

- **Ejemplo 1:**

Vamos a redondear y truncar a la centésima el número 2,2375

Número: 2,2375	Aproximación	Error absoluto
Redondeado a las centésimas	2,24	2,24 – 2,2375 = 0,0025
Truncado a las centésimas	2,23	2,2375 – 2,23 = 0,0075.

La mejor aproximación es la que tiene menor error absoluto. En este caso, 2,24 es la mejor aproximación.

- **Ejemplo 2:**

El número π =3,141592653....es un número irracional. Una aproximación a las centésimas es 3,14.

Al tener un número infinito de cifras decimales es imposible calcular el error absoluto, por este motivo, calculamos una cota del error.

El número π está comprendido entre los valores: $3,14 < \pi < 3,15$

Calculando la diferencia de los extremos de este intervalo determinamos una cota del error, es decir:

$$3,15 - 3,14 = 0,01$$

El error cometido es inferior a 0,01. Así, diremos que 0,01 es una cota del error absoluto cometido al tomar 3,14 como valor aproximado de π.

- **Ejemplo 3:**

Si π =3,141592653....y tomamos como aproximación 3,1416, ¿cuál es una cota del error absoluto cometido?

$$3,1415 < \pi < 3,1416.$$

La diferencia entre los extremos es 3,1416 – 3,1415 = 0,0001. Por tanto el error cometido es inferior a una diezmilésima.

Dado el rectángulo de medidas 5 x 4 cm, calcular su diagonal con un error inferior a una milésima.

Por el teorema de Pitágoras: $d^2 = 5^2 + 4^2 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34} = 6,403124237432...$

Si tomamos como diagonal 6,403, el error cometido es 0,00012423....., que es inferior a una milésima.

2. ERROR RELATIVO Y ERROR PORCENTUAL

En muchas ocasiones interesa una medida más precisa que el error absoluto, que relacione el valor absoluto con el número dado. No es lo mismo que el error de medición es menor que 5 centímetros cuando medimos la altura de una persona o la altura de un árbol. Por eso se define el error relativo.

Se llama **error relativo** de una aproximación al cociente entre el error absoluto y el valor exacto

- **Ejemplo 1:**

Así, el error relativo en la aproximación del número 0,4375 a las centésimas es:

$$e = \frac{error\ absoluto}{valor\ real} = \frac{|0´4375 - 0´44|}{0´4375} = \frac{0´0025}{0´4375} = 0´0057$$

El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas demos correctamente.

Si indicamos el error relativo en tantos por ciento, estamos especificando el **error porcentual** de dicha estimación.

Para determinar el error porcentual sólo tenemos que multiplicar por 100 el error relativo.

- **Ejemplo 2:**

Calcular el error relativo y porcentual que se produce al aproximar $\frac{1}{3}$ por 0,33.

- Error absoluto: $\frac{1}{3}$ - 0,33 = $\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100-99}{300} = \frac{1}{300}$
- Error relativo: $\dfrac{\frac{1}{3} - 0{,}33}{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
- Error porcentual es del 1%.

- **Ejemplo 3:**

Una balanza de peso no está equilibrada ya que marca 20 gr sin pesar nada. Pesamos dos objetos A y B en la balanza y obtenemos los siguientes pesos:

Objeto A: 60 gramos Objeto B: 2,2 Kg

El error absoluto cometido en ambas pesadas es la misma, sin embargo los errores relativos son distintos:

- Objeto A $\Rightarrow$ 10/40 = 0,2 (el peso real del objeto A es 60 – 20 = 40 gr)
- Objeto B $\Rightarrow$ 10/2180 = 0,00458 (el peso real del objeto B es 2200 – 20 = 2180 gr)

En el objeto A cometemos un error del 20%, mientras que en el objeto B es un 0,4%.

En la vida cotidiana siempre estamos realizando aproximaciones por defecto o por exceso expresando el error relativo en porcentaje.

Podemos decir que el valor 0,44 es una aproximación del número 0,4375 con un error inferior al 0,57%.

3. APROXIMACIONES EN LA CALCULADORA

Las calculadoras científicas suelen tener espacio en la pantalla para 8 ó 10 dígitos. De esta manera, cuando trabajamos con números irracionales, la calculadora nos proporciona un número aproximado.

En las calculadoras científicas podemos limitar el número de cifras decimales, encargándose ella de efectuar los redondeos correspondientes. Para ello, existe el modo **FIX**.

- **Ejemplo 1 :**

Si introducimos el número 123,4567 y queremos reducirlo a dos decimales, tecleamos

123 | · | 4567 | MODE | 7 | 2 | Aparece en pantalla | FIX 123.46 |

Si antes de introducir el número hacemos | MODE | 7 | 3 | aparece en pantalla | FIX 0.000 |

quedando preparada para que cuando se introduzca el número decimal se aproxime con tres cifras decimales.

Para volver a la posición normal, tecleamos MODE 9

También podemos introducir un número en notación científica especificando el número de cifras significativas con las que queremos trabajar, pulsando | MODE | 8 | n | , siendo n el número de dígitos significativos

- **Ejemplo 2:**

Si hacemos:

123 | · | 4567 | MODE | 8 | 4 | Aparece en pantalla | SCI 1.236 ^{02} |

Y pulsando MODE 9 volvemos al número a su forma original.

4. PROPAGACIÓN DEL ERROR

Al tomar una aproximación de un número estamos cometiendo un error. Vamos a ver qué ocurre con dicho error cuando se opera con la aproximación.

- **Ejemplo:**

Dado un rectángulo de lados 3 x 5, vamos a construir un cuadrado de medida la diagonal de dicho rectángulo y calcularemos su perímetro . Además vamos a dar el resultado con una cota de error absoluto inferior a una milésima.

Por el teorema de Pitágoras, obtenemos que la medida de la diagonal del rectángulo es

$$\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} = 5{,}830951894...$$

Tomamos como medida de la diagonal 5,830, ya que el error es 0,00095..., inferior a una milésima.

El perímetro del cuadrado es 4 · 5,830 = 23,32.

El error absoluto es $4\sqrt{34} - 23{,}32 = 0{,}0038$, superior a una milésima.

Si tomamos como medida de la diagonal 5,8309, el perímetro es 23,3236 y el error será 0,0002, inferior a 0,001 cm.

Actividades resueltas

1.- Calcula el error absoluto y el error relativo que se produce al aproximar $\frac{1}{6}$ por 0,17 .

El error absoluto es $\frac{1}{6}$ - 0,17 = $\frac{1}{6}$ - $\frac{17}{100}$ = $\frac{60-51}{300}$ = $\frac{9}{300} = \frac{3}{100}$ = 0,03

El error relativo es $\frac{\frac{3}{100}}{\frac{1}{6}} = \frac{18}{100} = 0{,}18 \Rightarrow$ El error relativo es del 18%.

2.- Redondea:

a) Hasta las milésimas el número 12,658742
b) Hasta las décimas el número 5,9067
c) Hasta las centésimas el número 1,3642

Calcula el error absoluto y relativo cometido en una de esas aproximaciones.

Vamos en primer lugar a determinar las aproximaciones indicadas.
Para calcular el error absoluto vamos a calcular la diferencia entre el valor real y la aproximación.

Para calcular el error relativo vamos a dividir el error absoluto entre el valor real

El error relativo es menor en la primera aproximación ya que es inferior a un diezmilésima.

Número	Aproximación	Error absoluto	Error relativo
12,658742	12,658	0,000742	$5{,}8 \cdot 10^{-5}$
5,9067	5,9	0,0067	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
1,3642	1,36	0,0042	$3{,}07 \cdot 10^{-3}$

3.- Para operar con el número π se elige en la práctica el 3,1416. Redondea el número π con 1, 2, 3 y 4 cifras decimales, indicando el error cometido en cada caso, y justifica la elección de 3,1416 que se hace en la práctica.

Aproximación	Error absoluto	Aproximación	Error absoluto
π = 3,1	0,041592653.... < 0,1	π = 3,14	Error: 0,001592653.... < 0,01
π = 3,141	0,000592653.... < 0,001	π = 3,1416	Error: 0,00000734.... < 0,000008

Este error es menor que 8 millonésimas, lo que da una buena aproximación para 4 cifras decimales.

Por eso para las operaciones ordinarios debe ser recomendado.

4.- Elige $\sqrt{17}$ = 4,123105625... con el menor número de cifras para que el producto 8 · $\sqrt{17}$ de un error menor que 1 milésima.

Calculando $8\sqrt{17}$ = 32,984845004941....

a) Si $\sqrt{17}$ = 4,1 $\Rightarrow 8\sqrt{17} \cong 32{,}8 \Rightarrow$ Error : 0,184845004....>0,001

b) Si $\sqrt{17}$ = 4,12 $\Rightarrow 8\sqrt{17} \cong 32{,}96 \Rightarrow$ Error : 0,024845004.....>0,001

c) Si $\sqrt{17}$ = 4,123 $\Rightarrow 8\sqrt{17} \cong 32{,}984 \Rightarrow$ Error : 0,000845004.....>0,001

d) Si $\sqrt{17}$ = 4,1234 $\Rightarrow 8\sqrt{17} \cong 32{,}9848 \Rightarrow$ Error : 0,00045004.....< 0,001

Por tanto, hay que elegir 4 cifras decimales.