Función Inversa

Una función es una relación entre dos variables, de manera que para cada valor de la variable independiente existe a lo más un único valor asignado a la variable independiente por la función.

Imagina que tienes la función $y = f(x)$. Tú le das un valor (x) y ella te devuelve otro $(f(x))$.

Una buena idea sería encontrar una función que cuando le demos el valor $f(x)$ nos devolviera x, es decir, una máquina que haga la transformación inversa de $f(x)$.

En otras palabras, queremos encontrar una función que deshace la transformación que ocasiona la función f sobre los números que le damos.

> **Definición 1**
>
> Función inversa
> *Sea f una función con dominio $\mathbb{X}_f$ y contradominio $\mathbb{Y}_f$. Si existe una función g con dominio $\mathbb{X}_g$ y contradominio $\mathbb{Y}_g$ tal que:*
>
> *i.* $f(g(x)) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{X}_g$
>
> *ii.* $g(f(x)) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{X}_f$
>
> *entonces decimos que las funciones f y g son inversas una de la otra.*
> *f^{-1} denota la función inversa de f.*

En otras palabras, si intercambiamos las coordenadas de los pares formados por $(x, f(x))$ obtenemos $(f(x), x)$, que no son sino los puntos de la función inversa f^{-1}. Es decir, el dominio de f es el contradominio de f^{-1} y el contradominio de f es el dominio de f^{-1}.

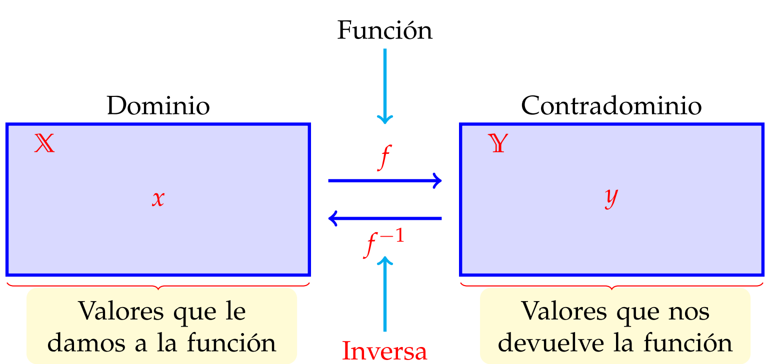
Importante[1]**:** $f^{-1}(x)$ *no* significa $\dfrac{1}{f(x)}$.

$f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

Pero

$(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$

Utilizando el diagrama de función, podemos explicar el nuevo concepto:



No todas las funciones tienen función inversa. Esto se debe a la definición de función.

Para que una relación sea considerada función, para cada elemento del dominio le debe corresponder a lo más un elemento del contradominio.

Si una función debe tener función inversa, a cada elemento del contradominio le debe corresponder a lo más un elemento del dominio (por definición de función inversa).

En otras palabras, para cada elemento del dominio de f le corresponde un elemento de su contradominio y viceversa.

[1] La notación de función inversa sugiere alguna relación con los exponentes, pero no es así.

Esto implica que para dos valores a, b distintos, entonces $f(a) \neq f(b)$. En otras palabras solamente para las funciones «*uno a uno*» podemos calcular su función inversa.

Ya se había mencionado en la sección anterior que si la función f es uno a uno (inyectiva), entonces cumple con:

$$\text{Si } a \neq b, \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$

y además, si g es la inversa de f, entonces, $g(f(a)) = a$ y $g(f(b)) = b$, por lo que si $f(a) = f(b)$, se sigue que $a = b$.

Lo anterior nos indica que:

Teorema 1 Si la funcion f tiene inversa, entonces, para cualesquiera dos elementos a, b en el dominio de f que cumplen $a \neq b$, se tiene que $f(a) \neq f(b)$.

En otras palabras, si una función tiene inversa, entonces es uno a uno y viceversa, si una función es uno a uno, entonces tiene inversa. Si y_0 está en el contradominio de la función f, entonces este valor tiene asociado un único valor x_0 a partir del cual se le calculó usando f. Es decir, $y_0 = f(x_0)$.

Si definimos la función g que toma como su dominio al contradominio de f y asignamos al contradominio de g los elementos del dominio de f, estamos diciendo que g es la función inversa de f.

Tanto f como g son funciones (una inversa de la otra) porque cumplen con la condición de que «*a cada elemento del dominio le corresponde a lo más un elemento del contradominio*», impuesto por la definición de función.

Ejemplo 1 Calcula la función inversa de la función:

$$y = 2\,x + 7$$

- Por definición de función inversa, para cada x le corresponde un y y viceversa.
- La función «*directa*» es: $y = 2\,x + 1$.
- La función inversa «*deshace*» la transformación, es decir, le damos y y ésta nos devuelve x.
- En otras palabras, la variable dependiente de la función «*directa*» viene siendo la variable independiente de la función inversa.
- Y la variable dependiente de la función «*directa*» juega el papel de la variable independiente en la función inversa.
- Así que vamos a despejar x en términos de y.

$$\begin{aligned} y &= 2\,x + 7 \\ y - 7 &= 2\,x \\ \frac{y-7}{2} &= x \end{aligned}$$

- Esta expresión puede verse como una función: nosotros le damos el valor de y y ésta nos devuelve el valor de x.
- Ahora cambiamos las variables para que se trate de la función inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$$

- Con esto hemos terminado.

Vamos a verificar que el resultado del ejemplo anterior es correcto. Para eso, vamos a calcular valores de y para la función «*directa*» y después vamos a hacer los cálculos respectivos para la función inversa.

$y = 2\,x + 7$

x	y
0	7
1	9
2	11
3	13
4	15

$y = \dfrac{x-7}{2}$

x	y
7	0
9	1
11	2
13	3
15	4

Vamos a llamar F a la función $y = 2\,x + 7$, y G a la función $y = (x-7)/2$.

De las tablas vemos que si damos 0 a la función F obtenemos 7. Por otra parte, si damos 7 la función G obtenemos 0.

Si damos 3 a F ésta nos devuelve 13, y si damos 13 a G nos devuelve 3.

Esto está de acuerdo con la definición de función inversa. Es decir, $G = F^{-1}$, la función G es la función inversa de la función F.

Es evidente de las tablas que el dominio de F es el contradominio de G y que el dominio de G es el contradominio de F.[2]

Puedes asignar otros valores y verás que para todos se cumple que $G(F(x)) = x$. Es decir, cuando sustituimos el valor que nos devuelve la función F (una vez que le damos un valor x), en la función G obtenemos x.

Si la función *directa* no es *uno a uno*, entonces su dominio no es igual al contradominio de su inversa. También, su contradominio no es igual al dominio de su inversa.

Ejemplo 2

Calcula la función inversa de la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{2\,x}$$

- Vamos a utilizar el mismo procedimiento.
- Despejamos x y después cambiamos las literales de lugar.
- El problema ahora consiste en que tendremos que resolver una ecuación cuadrática.
- Por eso tendremos que usar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

[2] Recuerda que $F(x)$ está en el contradominio de F y que x está en su dominio.

- Empezamos escribiendo la ecuación cuadrática en su forma general:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 - 1}{2\,x} \\ 2\,xy &= x^2 - 1 \\ x^2 - 2y\,x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, en este caso:
  - ✓ $a = 1$,
  - ✓ $b = -2\,y$,
  - ✓ $c = -1$.
- Ahora sustitumos en la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4\,(1)(-1)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{2y \pm \sqrt{4\,y^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2y \pm \sqrt{4\,(y^2 + 1)}}{2} \\ &= \frac{2y \pm 2\,\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\ &= y \pm \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

- Observa que el símbolo $\pm$ nos indica que para cada valor de x le corresponden dos valores de y.
- Esto se debe a que la función cuadrática $y = a\,x^2 + b\,x + c$ no es uno a uno.
- Así que tendremos que considerar solamente una parte de esta función.
- Vamos a considerar solamente la parte que tiene el signo de suma.
- Entonces, la función inversa de f es:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Debido a la forma como se define la función inversa, ésta tiene cierta simetría con la función *directa*.

Al graficar f y su inversa nos damos cuenta. El siguiente muestra eso.

Ejemplo 3

Calcula la función inversa de la función:

$$y = f(x) = 3\,x + 4$$

y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- Primero vamos a calcular la inversa:

$$\begin{aligned} y &= 3x + 4 \\ y - 4 &= 3x \\ \frac{y-4}{3} &= x \end{aligned}$$

- Y esto implica que la función inversa es:

$$y = \frac{x-4}{3}$$

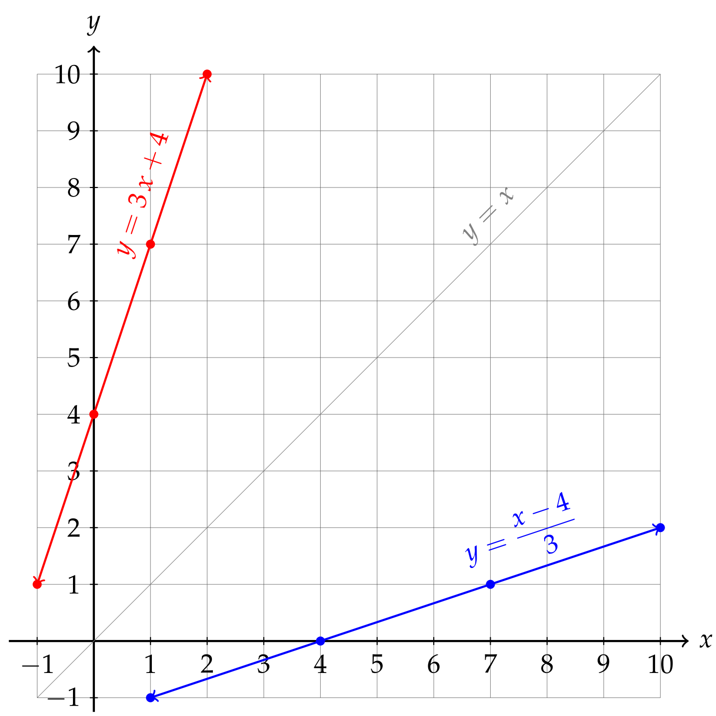
- A partir de esta función podemos llegar a la función «*directa*».
- Para este fin necesitamos calcular su inversa.
- Utilizamos el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-4}{3} \\ 3y &= x - 4 \\ 3y + 4 &= x \end{aligned}$$

- Ahora cambiamos las literales de posición y obtenemos la función «*directa*».

$$y = 3x + 4$$

- Entonces, la función inversa de la función inversa es la función «*directa*».
- Lo anterior se cumple para cualquier función uno a uno.
- La siguiente gráfica muestra ambas funciones:



- La recta $y = x$ sirve como referencia. ¿Puedes explicar por qué?

Al observar las gráficas de las funciones fácilmente puedes verificar que las coordenadas de x de la función «*directa*» son las coordenadas de y de la función inversa y viceversa.

Esto se puede observar inmediatamente en la siguiente tabla:

f					f^{-1}
x	-1	0	1	2	y
y	1	4	7	10	x

donde f es la función $y = 3\,x + 4$, mientras que f^{-1} es la función: $y = (x - 4)/3$.

Esto te debe permitir observar claramente que el dominio de f es el contradominio de f^{-1} y que el contradominio de f es el dominio de $f-1$.

Esto es así porque la función es *uno a uno*.

Cuando desees calcular la función inversa de una función que no sea *uno a uno* esto último no se cumplirá.

El siguiente ejemplo muestra otro caso.

Ejemplo 4

Calcula la función inversa de la función:

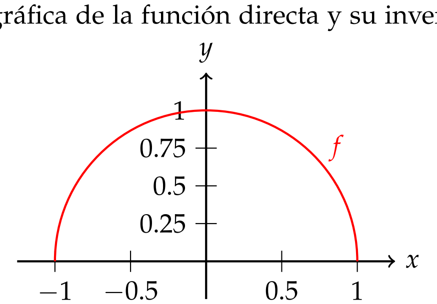
$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

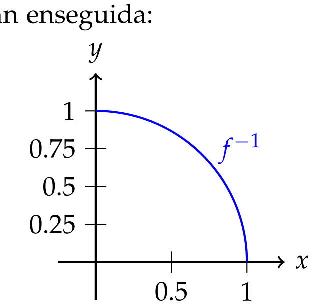
y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- En este caso parece muy sencillo el despeje:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 - x^2} \\ y^2 &= 1 - x^2 \\ x^2 &= 1 - y^2 \\ x &= \sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

- Observa que solamente hemos considerado la parte positiva del despeje.
- Del resultado tenemos que: $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- La gráfica de la función directa y su inversa se muestran enseguida:





¿Podríamos afirmar que $f = f^{-1}$?

¿Por qué?

- Observa que la función inversa solamente puede tomar valores no negativos de x.
- ¿Puedes explicar por qué?

Profesor:
f no es una función uno a uno.

Como solamente consideramos los valores positivos del contradominio de f, en la función inversa, la el dominio de f^{-1} solamente toma valores positivos.

La gráfica dada en el ejemplo muestra este resultado.

Esto ocurrirá cada vez que la función no sea uno a uno.

Ejemplo 5

Calcula la función inversa de la función:

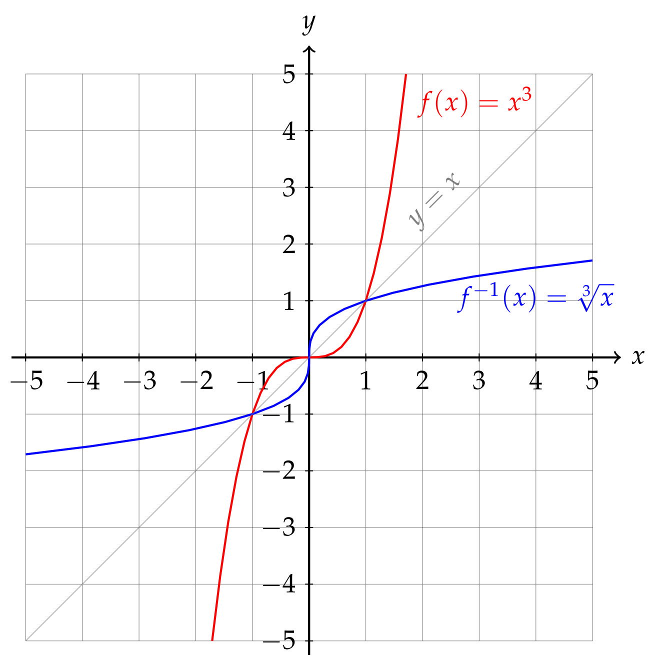
$$y = f(x) = x^3$$

y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- Primero calculamos la inversa:

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y^{1/3} &= x \\ \sqrt[3]{y} &= x \end{aligned}$$

- Entonces, $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.
- La gráfica de la función y su inversa se muestra enseguida:



- En este caso, el dominio de f corresponde con el contradominio de f^{-1} y el contradominio de f con el dominio de f^{-1}.
- Esto gracias a que f es uno a uno.
- ¿Puedes calcular $f^{-1}(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x}$?

En los siguientes capítulos estudiaremos varios tipos de funciones. Algunas de ellas tendrán inversa en intervalos adecuadamente definidos.

En segundo semestre estudiamos las funciones trigonométricas, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, Sus inversas son las funciones $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ y $y = \arctan x$, respectivamente, las cuales muy frecuentemente se escriben $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$ y $y = \tan^{-1} x$, para denotar las inversas de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, en las calculadoras científicas se utiliza más esta notación.

Las funciones exponenciales y logarítmicas también son *uno a uno* y por tanto, tienen inversa. Estas funciones serán estudiadas en el capítulo cuatro de este semestre.

Créditos

Albert Einstein	Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 07 de agosto de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx