
CAPÍTULO 6

LA CIRCUNFERENCIA

6.1. DEFINICIONES PRELIMINARES

Definición 37 (La circunferencia). *Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano, al punto fijo se le llama el centro de la circunferencia y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia.*

Notación: la circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r (ver Figura 1.), se denota por $C(O, r)$, en la notación de conjuntos es

$$C(O, r) = \{X \in \pi / OX = r, O, X \in \pi\}$$

Como sucedió con la recta en el plano, que dividió el plano en dos regiones disjuntas, lo mismo sucede con la circunferencia, la cual nos divide el plano en dos regiones, una de ellas la llamamos el interior y la otra el exterior de la circunferencia.

Definición 38 (Interior de la Circunferencia). *Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es menor que el radio, se le llama el interior de la circunferencia.*

Notación: el interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\text{IntC}(O, r)$, por lo tanto

$$\text{IntC}(O, r) = \{X \in \pi / OX < r, X, O \in \pi\}$$

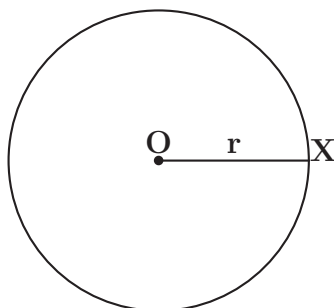


Figura 1.

Definición 39 (Exterior de la Circunferencia). Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es mayor que el radio, se le llama el exterior de la circunferencia.

Notación: el exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\mathbf{ExtC}(O, r)$, por lo tanto

$$\mathbf{ExtC}(O, r) = \{X \in \pi / OX > r, X, O \in \pi\}$$

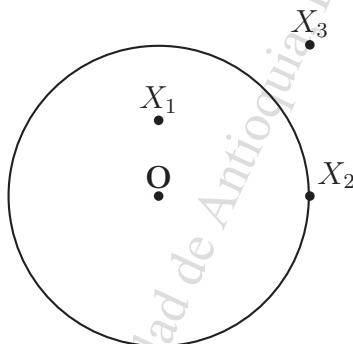


Figura 2.

En la Figura 2. los puntos X_1, X_2, X_3 están en el mismo plano de la $C(O, r)$.

Como $OX_1 < r$ entonces $X_1 \in \mathbf{IntC}(O, r)$.

Como $OX_3 > r$ entonces $X_3 \in \mathbf{ExtC}(O, r)$.

Como $OX_2 = r$ entonces $X_2 \in \mathbf{C}(O, r)$.

Definición 40 (Círculo). *La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo.*

Notación: el círculo de centro O y radio r se denota por $\overline{C}(O, r)$, por lo tanto

$$\overline{C}(O, r) = C(O, r) \cup \text{Int}C(O, r)$$

Definición 41 (Cuerda). *Es un segmento cuyos extremos son dos puntos diferentes de la circunferencia. Cuando el centro de la circunferencia es un punto interior de la cuerda, entonces a la cuerda la llamamos cuerda diametral y a su medida la llamamos diámetro.*

Por la definición de circunferencia, podemos concluir que el diámetro es dos veces el radio.

Definición 42 (Secante). *La recta que intercepta la circunferencia en al menos dos puntos distintos se le llama secante.*

Más adelante veremos que si una recta intercepta una circunferencia, lo hace a lo sumo en dos puntos diferentes.

Definición 43 (Tangente). *Si una recta en el plano de la circunferencia la intercepta en un único punto, entonces decimos que la recta es tangente a la circunferencia; al punto de contacto entre la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.*

Nota: en tres dimensiones puede ocurrir que la recta intercepta la circunferencia en un único punto y la recta no ser tangente a la circunferencia.

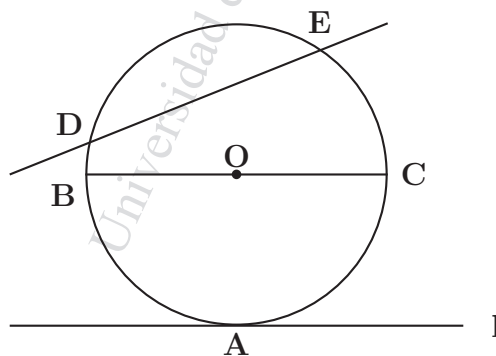


Figura 3.

En la Figura 3. se puede ver que:

l es tangente a la circunferencia $C(O, r)$ en A .

La cuerda \overline{BC} es diámetro.

La recta \overleftrightarrow{DE} es secante al circunferencia.

Definición 44 (Arco). *Dados dos puntos distintos de una circunferencia entonces la circunferencia queda dividida en dos conjuntos a los cuales llamaremos arcos.*

Notación: si los puntos son A y B (ver Figura 4.), los arcos son arco AMB y arco ANB , los cuales denotamos por \widehat{AMB} y \widehat{ANB} y como la

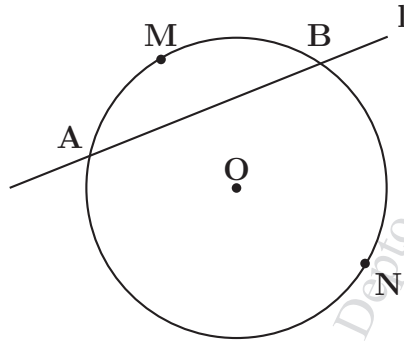


Figura 4.

cuerda \overline{AB} esta asociada a cada uno de éstos arcos entonces decimos que el arco \widehat{AMB} (o el arco \widehat{ANB}) está sub-tendido por la cuerda \overline{AB} o que la cuerda \overline{AB} sub-tiende al arco \widehat{AMB} (o al arco \widehat{ANB}).

A los puntos A, B se les llama los extremos del arco.

Si al arco le quitamos los extremos, a este nuevo conjunto lo llamamos el Interior del arco y lo denotamos por $Int(\widehat{AMB})$

Definición 45.

a.) **Arco Principal:** si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco principal

b.) **Arco no Principal:** si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en el mismo semiplano con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco no principal.

c.) Si la recta que pasa por los extremos del arco, también pasa por el centro de la circunferencia entonces decimos que los dos arcos que se forman son arcos principales (las semicircunferencias son arcos principales).

En la Figura 4. la recta l que pasa por A y B divide la circunferencia en dos arcos, el \widehat{AMB} que es arco principal y el \widehat{ANB} que es arco no principal. **Nota:** obsérvese que para cada arco principal corresponde uno y solo un arco no principal y recíprocamente, también obsérvese que la unión del arco principal y el no principal es la circunferencia.

Definición 46 (Ángulo Central o ángulo al centro). Es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y es coplanar con la circunferencia.

En la Figura 5. el ángulo \widehat{AOB} es un ángulo al centro; en este caso decimos que \widehat{AOB} intercepta al arco principal \widehat{AB} y el arco principal \widehat{AB} sub-tiende al ángulo \widehat{AOB} .

Obsérvese que al arco no principal \widehat{AMB} no se le asocia ángulo central, ya que los ángulos están definidos entre 0^0 y 180^0 .

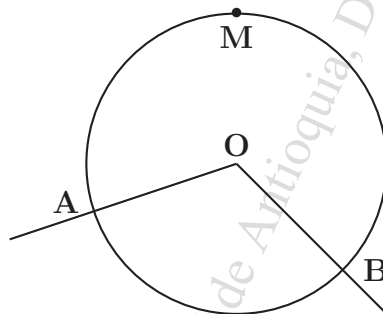


Figura 5.

6.2. TEOREMAS BÁSICOS

Teorema 65 (Existencia y unicidad de la circunferencia).

Por tres puntos distintos, no colineales pasa una y solo una circunferencia.

Demostración.

Existencia. Sean A, B, C tres puntos distintos y no colineales (ver Figura

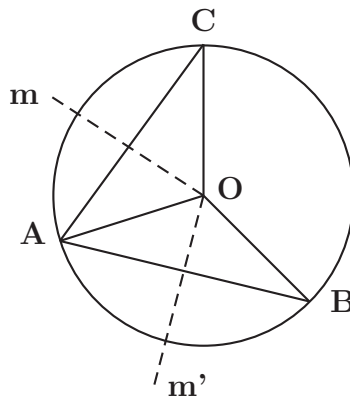


Figura 6.

6.); sean m y m' las mediatrices de los segmentos \overline{AC} y \overline{AB} respectivamente y por el **Corolario 13**. existe un único punto $\{O\} = m \cap m'$. Por las propiedades de la mediatriz se tiene que, como $O \in m$ entonces $OA = OC$ y similarmente, como $O \in m'$ entonces $OA = OB$, por lo tanto

$$OA = OB = OC$$

luego, O es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos A, B, C , llamémosla $C(O, r)$.

Unicidad. Supongamos que por los puntos A, B, C pasa otra circunferencia $C(O', r')$; como $O'A = O'B$ entonces por las propiedades de la mediatriz $O' \in m'$ y como $O'A = O'C$ entonces $O' \in m$, luego $\{O'\} = m \cap m'$ y como $\{O\} = m \cap m'$ entonces por el **Teorema 1**. $O' \equiv O$ y por tanto $r' = r$. De esta manera hemos concluido que

$$C(O, r) \equiv C(O', r') \quad \blacksquare$$

Construcción básica: por tres puntos dados, distintos y no colineales trazar con regla y compás, una circunferencia.

Construcción. (Ver Figura 7.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Trazo mediatriz l de \overline{AB} .
- Trazo mediatriz m de \overline{AC} , la cual corta a l en O .

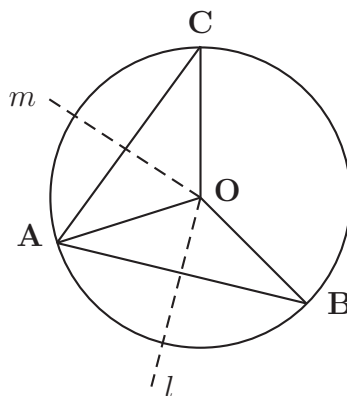


Figura 7.

- Con centro en O y radio OA trazo circunferencia, esta es la circunferencia pedida.

Justificación. Como O pertenece a las mediatrices l y m , entonces

$$OA = OB = OC$$

Teorema 66.

Si una recta y una circunferencia son coplanares, la recta intercepta a la circunferencia a lo sumo en dos puntos.

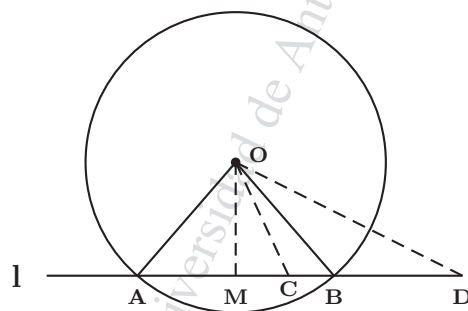


Figura 8.

Demostración. Sean l la recta y $C(O, r)$ la circunferencia; veamos que existen a lo sumo dos puntos distintos A y B tales que $\{A, B\} = C(O, r) \cap l$

(ver Figura 8.).

Neguemos la tésis, supongamos que existen tres puntos distintos que pertenecen a $C(O, r) \cap l$, con el tercer punto C pueden suceder dos casos: a.) que esté en el $Int\overline{AB}$, b.) que esté en el $Ext\overline{AB}$.

Caso a.) sea $C \in Int\overline{AB}$ y sea $\overline{OM} \perp l$, como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ entonces \overleftrightarrow{OM} es mediatriz de \overline{AB} y por tanto $A - M - B$. Con el punto C pueden suceder tres casos: 1.) $M - C - B$, 2.) $C \equiv M$, 3.) $A - C - M$.

caso 1.) Si $M - C - B$ entonces $\overline{MC} < \overline{MB}$ y por el teorema de las oblicuas, $\overline{OC} < \overline{OB}$ y como OB es radio, entonces $OC < r$, luego $C \in IntC(O, r)$. Absurdo!

caso 2.) Si $C \equiv M$ entonces por el teorema de las oblicuas, $\overline{OM} < \overline{OB}$, luego $OM = OC < r$, es decir, $C \in IntC(O, r)$. Absurdo!

caso 3.) Se hace en forma similar al caso 1.)

Caso b.) Sea $D \in Ext\overline{AB}$, por lo tanto, $\overline{MB} < \overline{MD}$ y por el teorema de las oblicuas $\overline{OB} < \overline{OD}$ y por tanto $r < OD$, es decir que, $D \in ExtC(O, r)$. Absurdo!

Afirmo tésis: existen a los sumo dos puntos distintos A, B tales que

$$\{A, B\} = C(O, r) \cap l. \quad \blacksquare$$

Nota: de acuerdo al teorema anterior, entre una recta y una circunferencia coplanares, pueden dárse tres posibilidades (ver Figura 9.).

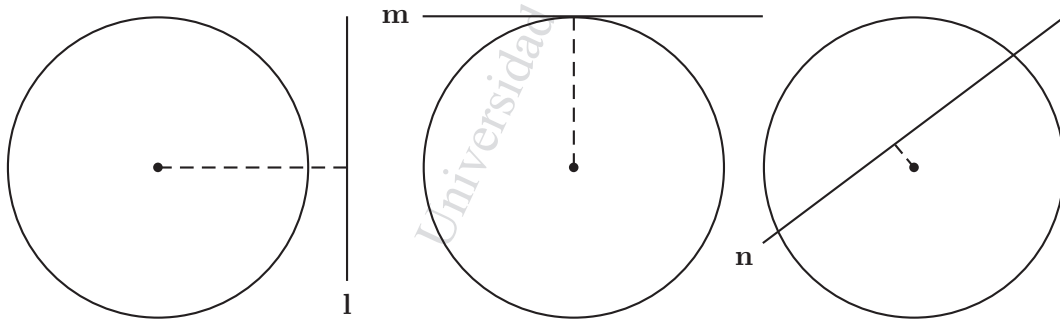


Figura 9.

1. Que la recta sea exterior a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es mayor que el radio.
2. Que la recta sea tangente a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es igual al radio.
3. Que la recta sea secante a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es menor que el radio.

Teorema 67 (Propiedad de la tangente).

Toda recta coplanar con una circunferencia y tangente a ella es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

Demostración. (Ver la Figura 10.)

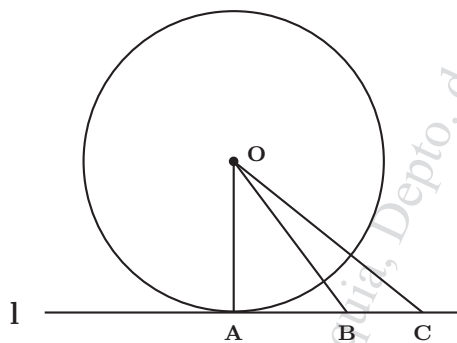


Figura 10.

Sea l tangente a la $C(O, r)$ en A . Veamos que $\overline{OA} \perp l$. Neguemos esta tésis: supongamos que \overline{OA} no es perpendicular a l , entonces por el teorema de la perpendicular por un punto exterior a una recta, existe una recta m que pasa por O tal que $m \perp l$, sea $\{B\} = l \cap m$.

Por el Axioma de construcción segmento existe un punto C tal que $A - B - C$ y $\overline{BC} \cong \overline{AB}$.

En el $\triangle OAC$ se tiene que \overline{OB} es altura y también es mediana y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, concluimos que el $\triangle OAC$ es isósceles y por tanto $\overline{OA} \cong \overline{OC}$, luego $C \in C(O, r)$ y como A es distinto de C , ya que $A - B - C$, entonces l es secante a la circunferencia. Absurdo! Afirмо tésis: $\overline{OB} \perp l$. ■

Teorema 68 (Recíproco del anterior).

Si una recta coplanar con una circunferencia es perpendicular a un radio, en el extremo del radio distinto del centro, entonces la recta es tangente a la circunferencia en dicho extremo.

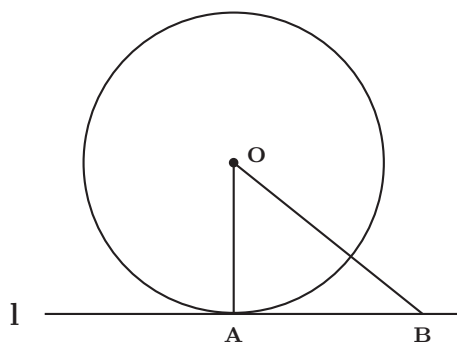


Figura 11.

Demostración. (Ver la Figura 11.) Sea \overline{OA} radio y $A \in l$ y $\overline{OA} \perp l$. Veamos que l es tangente a la circunferencia en A , para ello veamos que todo punto $B \in l$ y B distinto de A es exterior a la circunferencia.

En efecto, como \overline{OB} es una oblicua con respecto a O entonces por el teorema de las oblicuas, $\overline{OA} < \overline{OB}$, es decir $r < OB$ y por tanto, para todo punto B distinto de A , se cumple que $B \in \text{Ext}C(O, r)$, de aquí que l es tangente a la circunferencia en A . ■

Construcción básica: por un punto A dado en una circunferencia, trazar una recta tangente a la circunferencia.

Construcción. (Ver Figura 12.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno O con A .
- Por A trazo $l \perp \overline{OA}$, entonces l es tangente a la circunferencia por A .

Justificación. Como $\overline{OA} \perp l$ y \overline{OA} es radio, entonces l es tangente a la circunferencia.

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

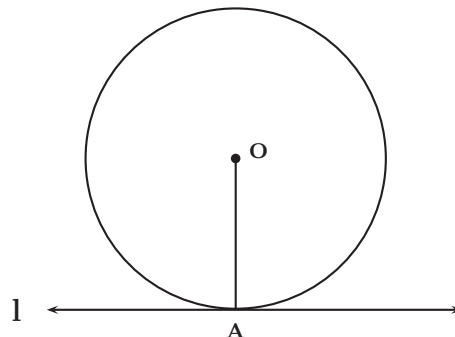


Figura 12.

Teorema 69.

- a.) La mediatriz de toda cuerda, pasa por el centro.
 b.) La recta que pasa por el centro y es perpendicular a una cuerda, es mediatriz de la cuerda.

Teorema 70.

Si dos circunferencias distintas y coplanares se interceptan entonces su intersección tiene a lo sumo dos puntos distintos.

Demostración. Sean $C(O, r)$ y $C(O', r')$ dos circunferencias distintas. Veamos que

$$C(O, r) \cap C(O', r')$$

tiene a lo sumo dos puntos distintos.

Neguemus lo anterior, es decir, supongamos que

$$C(O, r) \cap C(O', r') = \{A, B, C\},$$

donde A, B, C son tres puntos distintos.

Con los puntos A, B, C pueden suceder dos casos:

a.) Los puntos A, B, C son colineales, por tanto la recta que pasa por A, B, C intercepta las circunferencias en tres puntos distintos. Absurdo! (contradice el Teorema 66.)

b.) Los puntos A, B, C no son colineales y como son distintos, entonces por el Teorema 65., por A, B, C pasa una única circunferencia, pero

$$C(O, r) \cap C(O', r') = \{A, B, C\},$$

entonces, nuevamente por el Teorema 65., $C(O, r) \equiv C(O', r')$. Absurdo! ■

Definición 47. Decimos que dos puntos son simétricos con respecto a una recta, si la recta es mediatriz del segmento que une los dos puntos.

En la Figura 13. los puntos A, B son simétricos con respecto a la recta l , o también el punto B es simétrico de A con respecto a la recta l

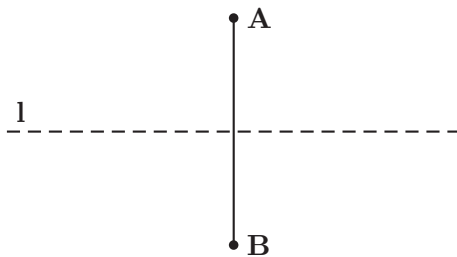


Figura 13.

Teorema 71.

- a.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan en un punto que no pertenece a la recta que pasa por los centros, entonces el simétrico de este punto con respecto a ésta recta también pertenece a las dos circunferencias.
- b.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan, entonces la distancia entre los centros es mayor que la diferencia entre los radios y menor que su suma.
- c.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan, la recta que pasa por los centros es mediatriz de la cuerda común.
- d.) Si dos circunferencias coplanares son tangentes, entonces el punto de tangencia esta sobre la recta de los centros.
- e.) Si dos circunferencias coplanares son tangentes entonces la recta perpendicular a la recta que pasa por los centros en el punto de tangencia, es tangente a ambas circunferencias (se le llama la tangentes común).

Demostración. d.) (Ver Figura 14.) Si el punto de tangencia no está sobre la recta que pasa por los centros, entonces por la parte a.) su simétrico con respecto a la recta que pasa por los centros, está sobre la circunferencia y por tanto las dos circunferencias son secantes. Absurdo!

e.) este resultado es consecuencia de la parte d.) y del teorema 70. ■

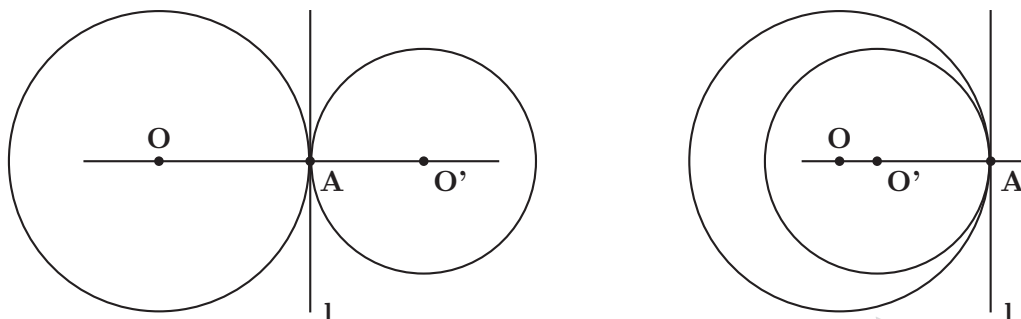


Figura 14.

6.3. POSICIONES ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

Por el Teorema 70., entre dos circunferencias coplanares se presentan las siguientes situaciones:

1.) **Exteriores.**(ver Figura 15.) Cuando su intersección es vacía y el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancia entre los

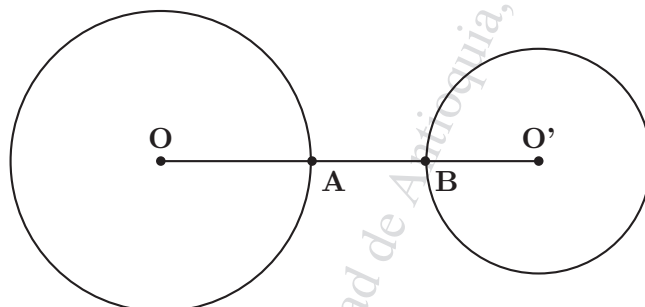


Figura 15.

centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son exteriores si y solo si

$$d = OA + AB + BO' = r + AB + r' > r + r'$$

2.) **Tangentes.**(ver Figura 14.) Cuando su intersección es un único punto. Se presentan dos casos:

a.) **Tangentes exteriormente:** cuando el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son tangentes exteriormente si y solo si

$$d = OA + BO = r + r'$$

b.) **Tangentes interiormente:** cuando el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son tangentes interiormente si y solo si

$$d = OA - BO = r - r'$$

3.) **Secantes:** (ver Figura 16.) cuando se intersectan en dos puntos distintos. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces (por el Teorema de la desigualdad triángular y su corolario) las circunferencias son secantes si y solo si

$$r - r' < d < r + r'$$

obsérvese que cuando dos circunferencias son secantes el \widehat{IntAMB} esta en el $ExtC(O, r)$ y el \widehat{IntANB} esta en el $IntC(O, r)$ y también, \widehat{IntALB} esta en el $ExtC(O', r')$ y el \widehat{IntARB} esta en el $IntC(O', r')$

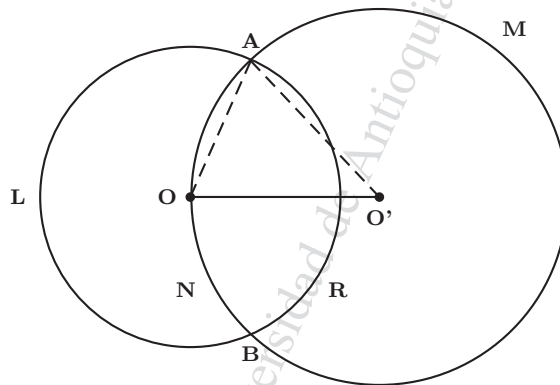


Figura 16.

4.) **Interiores:** (ver Figura 17.) cuando su intersección es vacía y el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son interiores si y solo si

$$d = OA - AB - BO' < r - r'$$

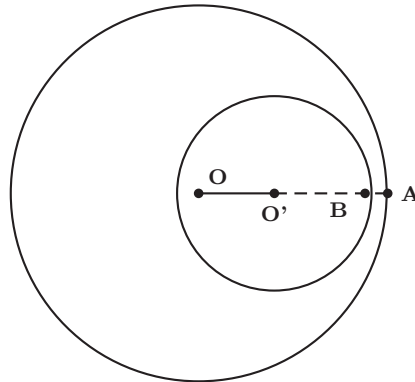


Figura 17.

5.) **Concéntricas:** dos circunferencias son concéntricas, cuando sus centros coinciden, es decir, si y solo si $d = OO' = 0$

Teorema 72 (De las tangentes por punto exterior).

En un mismo plano, por un punto exterior a una circunferencia existen dos rectas tangentes y solo dos.

Los segmentos entre el punto exterior y los puntos de tangencia son congruentes. La semirrecta con origen en el punto exterior y que pasa por el centro es bisectriz del ángulo entre las tangentes.

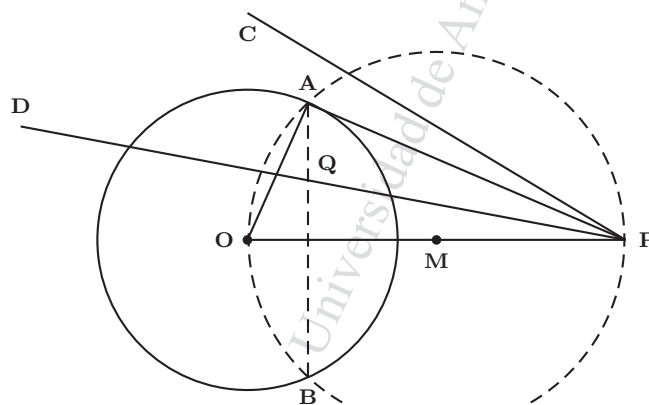


Figura 18.

Demostración. (Ver Figura 18.) (Existencia de dos rectas tangentes). Sea M el punto medio de \overline{OP} y sea la $C(O, MO)$, luego existen dos puntos y solo dos A, B tales que $\{A, B\} = C(O, r) \cap C(M, MO)$; por tanto

$$\overline{MO} \cong \overline{MP} \cong \overline{MA}$$

y por el Teorema 47, el $\triangle APO$ es rectángulo en A , es decir, $\overline{OA} \perp \overline{AP}$ y por el Teorema 68 \overleftrightarrow{AP} es tangente a la $C(O, r)$ en A . Similarmente se demuestra que \overleftrightarrow{BP} es tangente a la $C(O, r)$ en B .

En los triángulos rectángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OBP$ se tiene que:

$$\overline{OP} \cong \overline{OP}, \quad \overline{OA} \cong \overline{OB}$$

entonces por el criterio H-C, $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ y por tanto

$$\overline{AP} \cong \overline{BP}, \quad \widehat{APO} \cong \widehat{BPO}$$

(Existen exactamente dos tangentes) Supongamos que existen tres rectas tangentes distintas: \overleftrightarrow{AP} , \overleftrightarrow{BP} y otra; con esta otra, pueden suceder dos casos: a.) que esté en el \widehat{IntAPB} y sea tangente en D , b.) que esté en el \widehat{ExtAPB} y sea tangente en C .

a.) Sea $\overleftrightarrow{PD} \subset \widehat{IntAPB}$, entonces por el teorema de la barra transversal, existe un punto $\{Q\} = \overline{AB} \cap \overleftrightarrow{PD}$, por lo tanto $Q \in \overline{AB}$, lo cual implica que $Q \in \widehat{IntC(O, r)}$, Absurdo! porque la recta \overleftrightarrow{DP} es tangente en D a la circunferencia.

b.) Sea $\overleftrightarrow{PC} \subset \widehat{ExtAPB}$, entonces pueden suceder dos casos: 1). que \overleftrightarrow{PC} y \overleftrightarrow{PA} están en el mismo semiplano de borde \overleftrightarrow{OP} o 2). que \overleftrightarrow{PC} y \overleftrightarrow{PB} están en el mismo semiplano de borde \overleftrightarrow{OP} .

En cualquiera de éstos dos casos, se tiene, por lo que demostramos en la parte de existencia que $\widehat{OPA} \cong \widehat{OPC}$ (o $\widehat{OPB} \cong \widehat{OPC}$) y por el axioma de construcción de ángulo se tiene que $\overleftrightarrow{PA} \equiv \overleftrightarrow{PC}$ (o $\overleftrightarrow{PB} \equiv \overleftrightarrow{PC}$) lo cual es Absurdo! porque tomamos tres rectas tangentes distintas. ■

Construcción básica: por un punto P dado, exterior a una circunferencia, trazar las rectas tangentes a una circunferencia dada.

Construcción. (Ver Figura 19.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

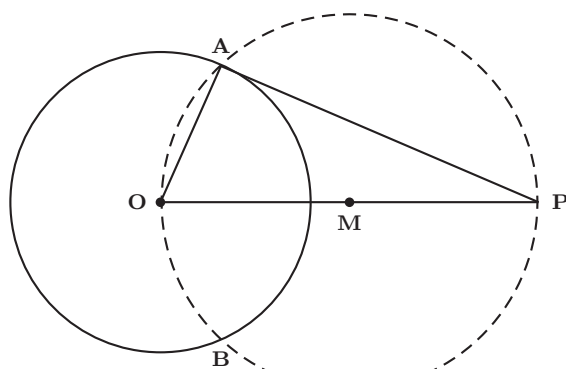


Figura 19.

- Uno O con P .
- Hallo M punto medio de \overline{OP} .
- Trazo circunferencia de centro M y radio MO (o MP), la cual corta la circunferencia dada en A y B .
- Uno A con P y B con P , las rectas \overleftrightarrow{AP} y \overleftrightarrow{BP} son tangentes a la circunferencia dada.

Justificación. Como \overline{OP} es diámetro entonces el $\triangle AOP$ es rectángulo en A y por lo tanto $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$ y como OA es radio, entonces \overleftrightarrow{AP} es tangente a la circunferencia en A . Similarmente se demuestra que \overleftrightarrow{BP} es tangente a la circunferencia.

El siguiente Teorema es similar al Teorema de las oblicuas, solo que en éste caso cambiamos la recta l por una circunferencia.

Teorema 73 (Teorema de las oblicuas para la circunferencia).

La distancia más corta de un punto distinto del centro a una circunferencia, es la parte del radio o su prolongación, comprendida entre el punto y la circunferencia.

Demostración. (Ver Figura 20.) Sea $P \notin C(O, r)$, $P \neq O$, con el punto P pueden suceder dos casos: a.) $P \in \text{Int}C(O, r)$, b.) $P \in \text{Ext}(O, r)$.

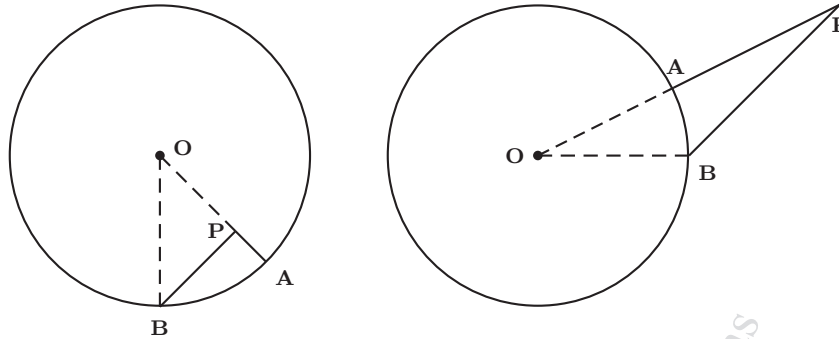


Figura 20.

a.) Si $P \in \text{Int}C(O, r)$; sea \overline{OA} el radio que contiene al punto P y sea B un punto distinto de A tal que $B \in C(O, r)$, veamos que $\overline{PA} < \overline{PB}$.
 Con el punto B pueden suceder dos casos: a) $B - O - P$, b) B, O, P son no colineales. Caso a): se deja como ejercicio. Caso b): por el teorema de la desigualdad triángular en el $\triangle OPB$ se tiene que

$$OB < OP + PB,$$

pero $OB = OA = OP + PA$, por lo tanto $OP + PA < OP + PB$, es decir, $PA < PB$ o sea que

$$\overline{PA} < \overline{PB}$$

b.) Si $P \in \text{Ext}(O, r)$, sea \overline{OA} el radio tal que su prolongación contiene al punto P , es decir que $P \in \overline{OA}$ y sea B un punto distinto de A tal que $B \in C(O, r)$, veamos que $\overline{PA} < \overline{PB}$.

Con el punto B pueden suceder dos casos: a) $B - O - P$, b) B, O, P son no colineales. Caso a): se deja como ejercicio. Caso b): en efecto, por el teorema de la desigualdad triángular en el $\triangle OPB$ se tiene que

$$OP < OB + BP,$$

pero $OP = OA + AP$, por lo tanto $OA + AP < OB + BP$, es decir, $PA < PB$ o sea que

$$\overline{PA} < \overline{PB} \quad \blacksquare$$

6.4. RELACIONES ENTRE ARCOS Y CUERDAS

De acuerdo a las definiciones de arco principal, cuerda y ángulo central en una circunferencia, podemos afirmar que existe una correspondencia biunívoca entre ellas, es decir, a cada arco principal corresponde uno y solo un ángulo central y una y solamente una cuerda.

Definición 48. a.) **Circunferencias congruentes.** Decimos que dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo radio y lo denotamos así:

$$C(O, r) \cong C(O', r)$$

b.) **Arcos principales congruentes.** Decimos que dos arcos principales en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus ángulos centrales son congruentes.

c.) **Arcos no principales congruentes.** Decimos que dos arcos no principales en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus respectivos arcos principales asociados son congruentes.

d.) Decimos que dos arcos son adyacentes, si el único punto en común es uno de sus extremos.

6.4.1. MEDIDA DE ARCOS

La unidad de medida para arcos, es el arco sub-tendido por un ángulo central de un grado, a esta unidad de medida para arcos también la llamaremos grado.

Si por el centro de una circunferencia trazamos dos rectas perpendiculares, entonces se forman cuatro ángulos al centro congruentes y por lo tanto interceptan la circunferencia, formando cuatro arcos principales congruentes y en consecuencia su medida será 90°

Por lo anterior podemos concluir que la medida de la semicircunferencia es 180° y la medida de la circunferencia es 360° .

Nota: no se debe confundir el concepto de medida de arco con el de longitud de arco, el primero tiene por unidad de medida el grado y el segundo tiene por

unidad de medida la unidad de longitud (metros o centímetros o pulgadas, etc.).

Definición 49. La medida en grados de un arco \widehat{ACB} denotada por $m(\widehat{ACB})^\circ$ se define así (ver Figura 21.):

1. Si \widehat{ACB} es el arco principal sub-tendido por el ángulo central \widehat{AOB} , entonces $m(\widehat{ACB})^\circ$ es numéricamente igual a la medida del ángulo central \widehat{AOB} . Es decir:

$$m(\widehat{ACB})^\circ = m(\widehat{AOB})$$

2. Si \widehat{ADB} es el arco no principal determinado por A y B entonces

$$m(\widehat{ADB})^\circ = 360^\circ - m(\widehat{ACB})^\circ,$$

donde \widehat{ACB} es el arco principal.

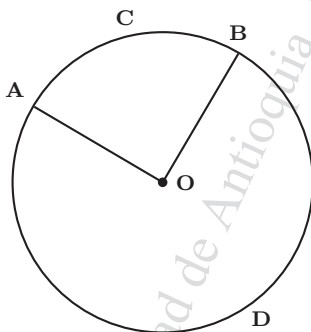


Figura 21.

Postulado de adición para arcos adyacentes:

$$\widehat{AMB} \cup \widehat{BNC} = \widehat{ABC}$$

y

$$m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{BNC}) = m(\widehat{ABC})$$

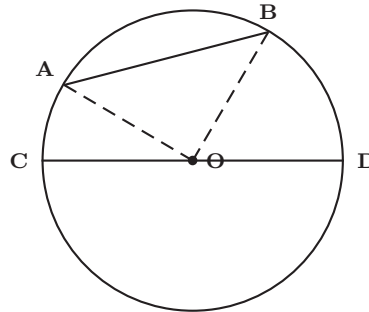


Figura 22.

Teorema 74.

En una misma circunferencia el diámetro es la mayor de las cuerdas.

Demostración. (Ver Figura 22.) Sea \overline{AB} una cuerda que no contiene al centro O y sea \overline{CD} un diámetro. Por el teorema de la desigualdad triangular en el $\triangle OAB$ se tiene que $AB < OA + OB$, pero como $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ son radios, entonces $OA + OB = OC + OD = CD$, por tanto $AB < CD$, es decir,

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad \blacksquare$$

Teorema 75.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. Cuerdas congruentes equidistan del centro.
2. Dadas dos cuerdas, la mayor dista menos del centro.

Demostración. (Ver Figura 23.) La parte 1.) se deja como ejercicio.
 2.) Sea la $C(O, r)$ y sean \overline{AB} y \overline{CD} cuerdas tales que $\overline{AB} < \overline{CD}$ entonces por la definición de $<$ existe un punto $E \in \text{Int}(\overline{CD})$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$. Como E es punto interior de la circunferencia, entonces $\overline{OE} < \overline{OB}$; en los $\triangle OAB$ y $\triangle OCE$ se tiene:

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CE}, \quad \overline{OB} > \overline{OE}$$

luego $\widehat{OAB} > \widehat{OCE}$.

Sea F el pie del segmento perpendicular desde O a \overline{AB} y sea G el pie del

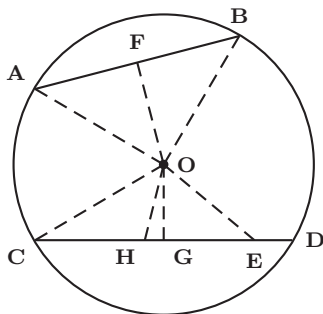


Figura 23.

segmento perpendicular desde O a \overline{CD} y por tanto F , G son puntos medios de \overline{AB} y \overline{CD} respectivamente y sea H el punto medio de \overline{CE} .

En los $\triangle OAF$ y $\triangle OCH$ se tiene:

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \quad \overline{AF} \cong \overline{CH}, \quad \widehat{OAF} > \widehat{OCH}$$

luego $\overline{OF} > \overline{OH}$; por el teorema de las oblicuas $\overline{OH} > \overline{OG}$ y por transitividad $\overline{OF} > \overline{OG}$. ■

A continuación se enuncia el recíproco del anterior teorema, se deja como ejercicio.

Teorema 76.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. Cuerdas equidistantes del centro son congruentes.
2. Dadas dos cuerdas, la que dista menos del centro es mayor.

Teorema 77.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. Dos ángulos al centro son congruentes si y solo si sub-tienden arcos principales congruentes.
2. Si los ángulos al centro no son congruentes, el arco principal sub-tendido por el ángulo al centro mayor, es mayor. Recíprocamente, si el arco principal es mayor entonces el ángulo al centro es mayor.

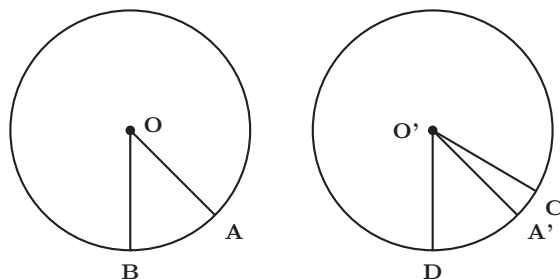


Figura 24.

Demostración. (Ver Figura 24.) La parte 1. se deja como ejercicio.

2. Supongamos que $\widehat{AOB} < \widehat{CO'D}$, entonces por la definición de $<$, existe una semirrecta $\overrightarrow{O'A'} \subset \text{Int}\widehat{CO'D}$, con $A' \in C(O', r)$ tal que $\widehat{A'O'D} \cong \widehat{AOB}$, luego por 1. $\widehat{AB} \cong \widehat{A'D}$ y por tanto $A' \in \text{Int}\widehat{CD}$. Luego $\widehat{A'D} < \widehat{CD}$ y por tanto $\widehat{AB} < \widehat{CD}$. ■

El recíproco se deja como ejercicio.

Teorema 78.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. *Dos cuerdas son congruentes si y solo si sub-tienden arcos principales congruentes.*
2. *Si las cuerdas no son congruentes, la mayor de las cuerdas sub-tiende el mayor arco principal. Recíprocamente, el mayor arco principal sub-tiende mayor cuerda.*

Demostración. (Ver Figura 25.) La parte 1. se deja como ejercicio.

2. Supongamos que $\overline{AB} > \overline{CD}$; en los $\triangle AOB$ y $\triangle COD$ se tiene que

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \quad \overline{OB} \cong \overline{OD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}$$

entonces, por el criterio L-L-L en desigualdades, $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$

y por el teorema anterior, $\widehat{AB} > \widehat{CD}$, entendiéndose que son los arcos principales. ■

El recíproco se deja como ejercicio.

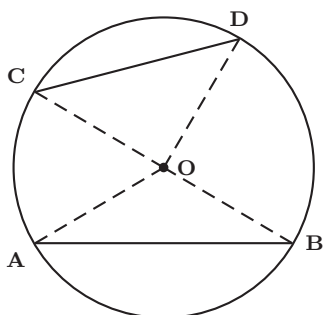


Figura 25.

Teorema 79.

Todo radio perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y biseca al arco principal sub-tendido por la cuerda. Recíprocamente, todo radio que biseca una cuerda o al arco principal sub-tendido, es perpendicular a la cuerda.

Demostración. (Ver Figura 26.)

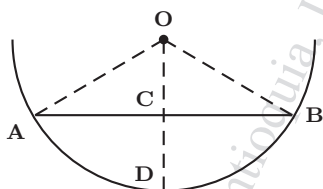


Figura 26.

Sea \overline{AB} una cuerda y \overline{OD} un radio perpendicular a la cuerda \overline{AB} en C . Como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, entonces el $\triangle OAB$ es isósceles; como \overline{OC} es altura en dicho triángulo, entonces por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, \overline{OC} es bisectriz y mediana en éste triángulo, luego C es punto medio de \overline{AB} y $\widehat{AOD} \cong \widehat{DOB}$ y ambos son ángulos al centro, por tanto $\widehat{AD} \cong \widehat{DB}$. ■

Teorema 80 (Arcos entre paralelas).

Los arcos principales de una misma circunferencia, comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes.

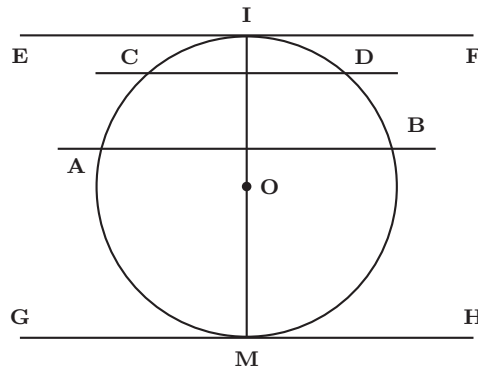


Figura 27.

Demostración. (Ver Figura 27.) Pueden suceder los siguientes casos: 1. que las dos rectas sean secantes. 2. que una recta sea secante y la otra sea tangente. 3. que las dos rectas sean tangentes.

1. Para este caso, supongamos que \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} son secantes y paralelas; sean \widehat{AC} y \widehat{BD} los arcos principales comprendidos entre éstas rectas. Sea \overline{OI} un radio perpendicular a la cuerda \overline{AB} y por tanto \overline{OI} es perpendicular a la cuerda \overline{CD} , ya que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y por teorema anterior, I es punto medio del arco \widehat{AIB} y del arco \widehat{CID} , luego

$$m(\widehat{AI}) = m(\widehat{IB}), \quad m(\widehat{CI}) = m(\widehat{ID})$$

restando $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$, o sea que $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$.

2. Para este caso, supongamos que \overleftrightarrow{CD} es secante y \overleftrightarrow{EF} es tangente en I a la circunferencia, por lo tanto el radio \overline{OI} es perpendicular a \overleftrightarrow{EF} y como $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ entonces $\overline{OI} \perp \overline{CD}$ y por tanto $\widehat{CI} \cong \widehat{ID}$.

3. Para este caso, supongamos que \overleftrightarrow{EF} es tangente en I a la circunferencia y \overleftrightarrow{GH} es tangente en M a la circunferencia, luego $\overline{OI} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\overline{OM} \perp \overleftrightarrow{GH}$ como $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ entonces $\overline{OI} \perp \overleftrightarrow{GH}$ y por el Teorema de la unicidad de la perpendicular por un punto exterior a una recta, $\overline{OI} \equiv \overline{OM}$, luego I, O, M son colineales y por lo tanto \overline{IM} es diámetro, esto demuestra que

$$\widehat{IAM} \cong \widehat{IBM}.$$

Veamos que los arcos entre rectas paralelas son principales, en efecto,

Como \overleftrightarrow{EF} es tangente a la circunferencia en I y \overleftrightarrow{GH} es tangente a la circunferencia en M y $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$, por lo tanto, \overline{IM} es diámetro o sea que los arcos \widehat{IBM} y \widehat{IAM} son arcos principales, por lo tanto, cualquier arco comprendido entre estos dos arcos, son arcos principales y de aquí que \widehat{AC} , \widehat{DB} , \widehat{IC} , \widehat{ID} etc. son arcos principales. ■

Nota: se deja como ejercicio, mostrar que el recíproco también es cierto.

6.5. ÁNGULO INSCRITO Y ARCO CAPÁZ

Definición 50 (Ángulo Inscrito en un arco). Decimos que un ángulo esta inscrito en un arco si:

1. cada extremo del arco esta respectivamente sobre cada lado del ángulo.
2. el vértice del ángulo es un punto del arco distinto de los extremos del arco.

Definición 51 (Arco capáz). El arco que acompaña el ángulo inscrito, en la definición anterior, se le llama arco capáz.

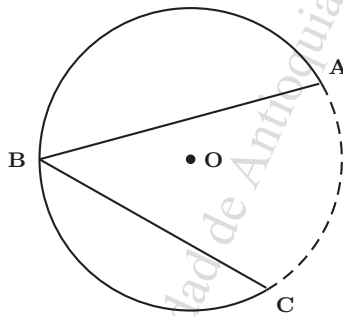


Figura 28.

En la Figura 28. el \widehat{ABC} esta inscrito en el arco capáz \widehat{ABC}

Teorema 81 (Teorema del ángulo inscrito).

La medida de un ángulo inscrito en un arco es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.

Demostración. Pueden suceder tres casos, según la posición del centro: 1. El centro está sobre uno de los lados del ángulo. 2. El centro está en el interior del ángulo. 3. El centro está en el exterior del ángulo.

1. El centro está sobre uno de los lados del ángulo (Ver Figura 29.). Sea \widehat{ABC} inscrito en la $C(O, r)$ y $O \in \overrightarrow{BC}$. Veamos que $m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AC})^o$. Tracemos el radio \overline{OA} , por tanto el $\triangle AOB$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles, $\widehat{ABO} \cong \widehat{BAO}$ y como \widehat{AOC} es ángulo exterior, entonces

$$\gamma = \alpha + \beta = 2\beta$$

y siendo \widehat{AOC} un ángulo al centro cuya medida es γ entonces la medida del arco $m(\widehat{AC})^o = m(\widehat{AOC})^o = \gamma$
luego

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}m(\widehat{AC})^o$$

2. Cuando $O \in \text{Int}(\widehat{ABC})$ (Ver Figura 30.).

Como $O \in \text{Int}(\widehat{ABC})$ entonces la semirrecta $\overrightarrow{BO} \subset \text{Int}(\widehat{ABC})$ y por tanto

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{OBC}) = \beta + \gamma$$

sea $D \in \overrightarrow{BO} \cap C(O, r)$, por la parte 1. de este teorema, $m(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AD})$ y $m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{DC})$ entonces

$$m(\widehat{ABC}) = \beta + \gamma = \frac{1}{2}m(\widehat{AD}) + \frac{1}{2}m(\widehat{DC}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{AD}) + m(\widehat{DC})) = m(\widehat{AC})$$

3. Cuando $O \in \text{Ext}(\widehat{ABC})$ (Se deja como ejercicio). ■

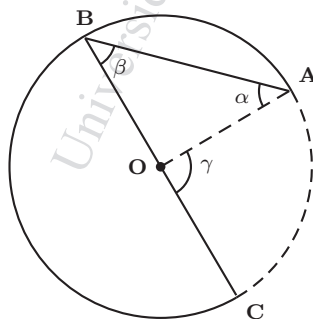


Figura 29.

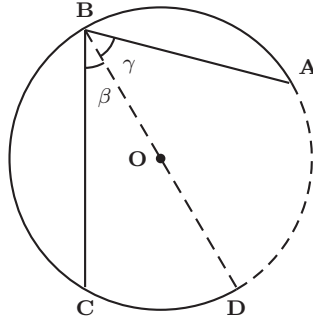


Figura 30.

Corolario 26 (Arco capáz). Todos los ángulos inscritos en el mismo arco capáz son congruentes.

Corolario 27. Todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

Definición 52 (Ángulo semi-inscrito). El ángulo cuyo vértice esta sobre la circunferencia, uno de los lados es tangente y el otro es secante a la circunferencia, se le llama ángulo semi-inscrito.

Teorema 82 (Del ángulo semi-inscrito).

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del arco cuyo interior esta en el interior del ángulo.

Demostración. Sea \overleftrightarrow{AC} una recta tangente a la $C(O, r)$ en A y \overleftrightarrow{AB} una secante con $B \in C(O, r)$. Veamos que $m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AMB})$.

Se pueden dar tres casos: 1. \widehat{BAC} es agudo. 2. \widehat{BAC} es obtuso. 3. \widehat{BAC} es recto.

1. \widehat{BAC} es agudo (Ver Figura 31.)

Por Playfair, por B pasa $l \parallel \overleftrightarrow{AC}$, sea $D \in l \cap C(O, r)$ y $D \neq B$, luego por el Teorema de arcos entre paralelas $\widehat{AMB} \cong \widehat{AND}$ y por el Teorema de los alternos internos entre paralelas, $\widehat{CAB} \cong \widehat{ABD}$, pero el \widehat{ABD} es un ángulo inscrito y la $m(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AND})$, por lo tanto $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AMB})$.

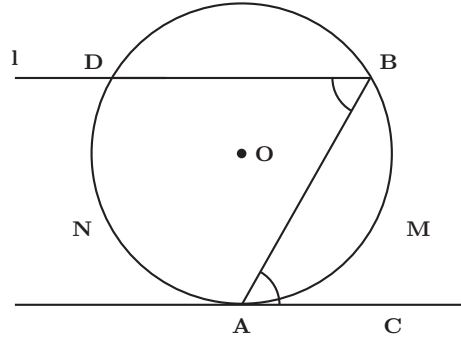


Figura 31.

2. \widehat{BAC} es obtuso (Ver Figura 32.)

Por Playfair, por B pasa $l \parallel \overleftrightarrow{AC}$, sea $D \in l \cap C(O, r)$ y $D \neq B$, luego por el Teorema de arcos entre paralelas $\widehat{ANB} \cong \widehat{AMD}$, por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ de aquí que el $\triangle BAD$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$. Por otro lado, por el Teorema de los alternos internos entre paralelas, $\widehat{HAB} \cong \widehat{ABD}$ y $\widehat{ADB} \cong \widehat{DAC}$, luego $\widehat{HAB} \cong \widehat{DAC}$ y como el ángulo \widehat{HAB} es agudo, concluimos que el \widehat{DAC} es agudo y como \widehat{BAC} es obtuso y \widehat{DAC} es agudo, tienen el mismo vértice, comparten un lado y están en el mismo semiplano entonces

$$\overrightarrow{AD} \subset \text{Int}(\widehat{BAC})$$

luego

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BLD}) + \frac{1}{2}m(\widehat{DMA}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BDA})$$

3. \widehat{BAC} es recto (Se deja como ejercicio). ■

Construcción básica: dado el ángulo $\hat{\alpha}$ y el segmento de longitud a , construir el arco capaz de $\hat{\alpha}$ y a .

Construcción. (Ver Figura 33.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Sobre una recta l fijo un punto A .
- Con centro en A y radio a trazo arco que corta a l en B .

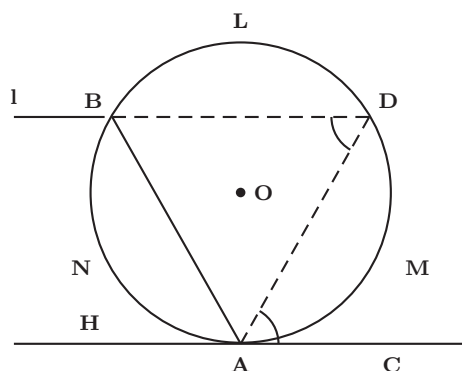


Figura 32.

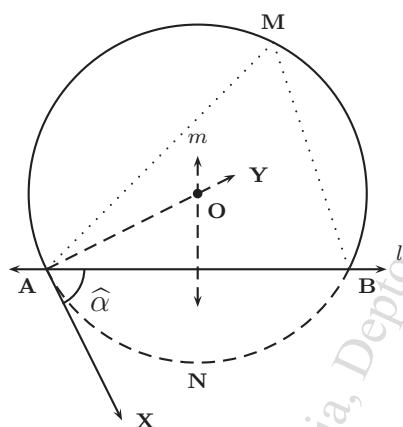


Figura 33.

- Con vértice A y lado \overrightarrow{AB} trazo el ángulo $\hat{\alpha}$, produciendo la semirrecta \overrightarrow{AX} .
- Por A trazo $\overrightarrow{AY} \perp \overrightarrow{AX}$.
- Hallo m mediatriz de \overline{AB} , la cual corta a \overrightarrow{AY} en O .
- Con centro en O y radio OA trazo el arco \widehat{AMB} , de tal manera que M y X queden en semiplanos opuestos con respecto a l , el arco \widehat{AMB} es el arco capaz de a y $\hat{\alpha}$

Justificación. Como $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ANB})$ y por el teorema del ángulo

semi-inscrito $\widehat{\alpha} = m(\widehat{BAX}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ANB})$ entonces

$$m(\widehat{AMB}) = \widehat{\alpha}$$

Teorema 83 (Ángulo con el vértice en el interior de la circunferencia).

La medida de un ángulo que tiene su vértice en el interior de la circunferencia es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

Demostración. (Ver Figura 34.)

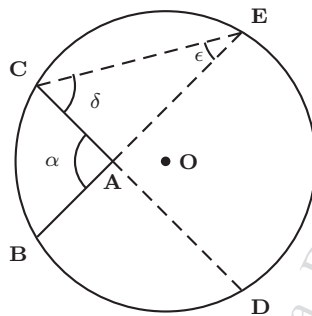


Figura 34.

Veamos que $m(\widehat{BAC}) = \alpha = \frac{1}{2}(m(\widehat{BC}) + m(\widehat{DE}))$

Sea $D \in \overleftrightarrow{AC} \cap C(O, r)$ y $E \in \overleftrightarrow{AB} \cap C(O, r)$. Unamos C con E , por el Teorema del ángulo exterior en el $\triangle ACE$ se tiene que $\alpha = \delta + \epsilon$ y por el Teorema del ángulo inscrito $\delta = \frac{1}{2}m(\widehat{ED})$ y $\epsilon = \frac{1}{2}m(\widehat{BC})$, luego

$$\alpha = \frac{1}{2}m(\widehat{ED}) + \frac{1}{2}m(\widehat{BC}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{BC}) + m(\widehat{ED})) \quad \blacksquare$$

Teorema 84 (Ángulo con el vértice en el exterior de la circunferencia).

La medida del ángulo formado por dos semirrectas con origen común en un punto exterior a una circunferencia es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.

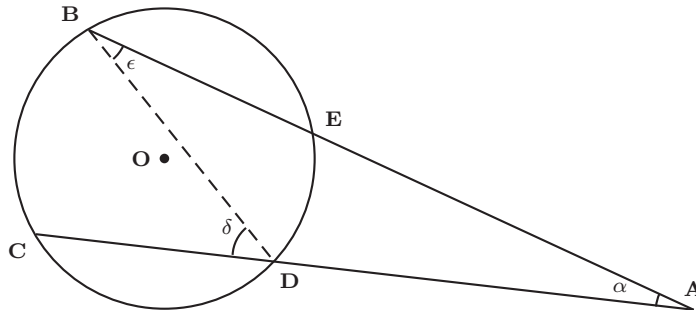


Figura 35.

Demostración. (Ver Figura 35.)

Sea $\hat{\alpha}$ el ángulo formado por las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} . Unamos B con D , el ángulo $\hat{\delta}$ es exterior al $\triangle ABD$, entonces por el teorema del ángulo exterior $\delta = \alpha + \epsilon$, luego $\alpha = \delta - \epsilon$ y por el teorema del ángulo inscrito, $\delta = \frac{1}{2}m(\widehat{BC})$ y $\epsilon = \frac{1}{2}m(\widehat{ED})$, sustituyendo en la expresión anterior,

$$\alpha = \frac{1}{2}m(\widehat{BC}) - \frac{1}{2}m(\widehat{ED}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{BC}) - m(\widehat{ED})) \quad \blacksquare$$

Corolario 28. La medida del ángulo formado por dos semirrectas tangentes con origen común en un punto exterior a una circunferencia, es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.

Corolario 29. La medida del ángulo formado por dos semirrectas, una tangente y la otra secante, con origen común en un punto exterior a una circunferencia, es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.

6.6. POLÍGONOS INSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Definición 53.

1. Decimos que un polígono convexo está inscrito en una circunferencia, si todos sus vértices están sobre la circunferencia; de la circunferencia decimos que está circunscrita al polígono.

2. Decimos que un polígono convexo está circunscrito a una circunferencia, si todos sus lados son tangentes a la circunferencia; de la circunferencia decimos que está inscrita en el polígono.

Definición 54 (Cuadrilátero cíclico). Decimos que un cuadrilátero convexo es cíclico si está inscrito en una circunferencia.

Nota: el rectángulo y el cuadrado son cíclicos, pues el punto de intersección de sus diagonales equidista de sus vértices

Teorema 85.

Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}, \quad \widehat{BDC} \cong \widehat{BAC}, \quad \widehat{CBD} \cong \widehat{CAD}, \quad \widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}.$$

Demostración. (\Rightarrow) La demostración se deja como ejercicio.

(\Leftarrow) Veamos que si: $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$, o $\widehat{BDC} \cong \widehat{BAC}$, o $\widehat{CBD} \cong \widehat{CAD}$, o $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$ entonces $ABCD$ es cíclico.

Como A, B, D son tres puntos no colineales, entonces por el Teorema de determinación de la circunferencia (Teorema 65.), por A, B, D pasa una única circunferencia $C(O, r)$; con respecto a ésta circunferencia y con el punto C pueden suceder tres casos: a. $C \in \text{Int}C(O, r)$, b. $C \in \text{Ext}C(O, r)$, c. $C \in C(O, r)$.

Veamos que los casos a. y b. producen una contradicción (Ver Figura 36.).

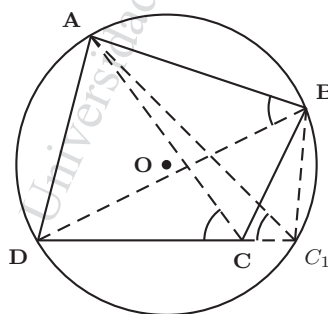


Figura 36.

a. $C \in \text{Int}C(O, r)$. Sea $C_1 \in \overleftrightarrow{DC} \cap C(O, r)$ y $C_1 \neq D$, luego por la parte 1. de éste teorema, $\widehat{AC_1D} \cong \widehat{ABD}$, pero por hipótesis $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$, luego

$$\widehat{ACD} \cong \widehat{AC_1D}.$$

Por otro lado, como A, C_1, C son tres puntos no colineales, entonces el $\triangle AC_1C$ existe y por el Teorema del ángulo exterior, $\widehat{ACD} > \widehat{AC_1C}$, lo cual es absurdo.

b. $C \in \text{Ext}C(O, r)$. Se demuestra en forma similar a a. ■

Teorema 86 (Teorema de los cuadriláteros cíclicos).

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y solo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

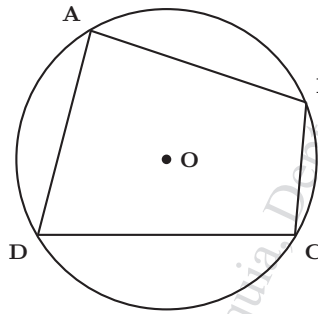


Figura 37.

Demostración. (Ver Figura 37.)

1. Supongamos que el cuadrilátero es cíclico, entonces por el Teorema del ángulo inscrito, $m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BCD})$ y $m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAD})$, sumando éstas dos últimas expresiones,

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BCD}) + \frac{1}{2}m(\widehat{BAD}) =$$

$$\frac{1}{2}(m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{BAD})) = \frac{1}{2}(\text{medida de la circunferencia}) = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$$

Como la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° entonces

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ.$$

2. Veamos que si $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$ o $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ entonces $ABCD$ es cíclico.

Como A, B, D son tres puntos no colineales, entonces por el Teorema de determinación de la circunferencia (Teorema 65.), por A, B, D pasa una única circunferencia $C(O, r)$; con respecto a ésta circunferencia y con el punto C pueden suceder tres casos: a). $C \in \text{Int}C(O, r)$, b). $C \in \text{Ext}C(O, r)$, c). $C \in C(O, r)$.

Veamos que los casos a). y b). producen una contradicción (Ver Figura 38.).

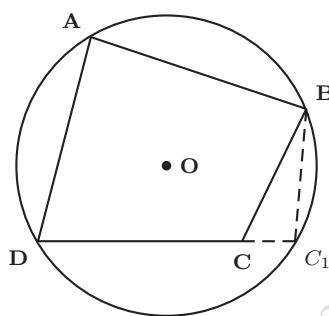


Figura 38.

a). $C \in \text{Int}C(O, r)$. Sea $C_1 \in \overleftrightarrow{DC} \cap C(O, r)$ y $C_1 \neq D$, luego por la parte 1. de éste teorema, $m(\widehat{BC_1D}) + m(\widehat{BAD}) = 180^\circ$, pero por hipótesis,

$$m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{BAD}) = 180^\circ,$$

por lo tanto $m(\widehat{BC_1D}) = m(\widehat{BCD})$, es decir, $\widehat{BC_1D} \cong \widehat{BCD}$. Por otro lado, como B, C_1, C son tres puntos no colineales, entonces el $\triangle BC_1C$ existe y por el Teorema del ángulo exterior, $\widehat{BCD} > \widehat{BC_1C}$, lo cual es absurdo.

b). $C \in \text{Ext}C(O, r)$. Se demuestra en forma similar a a). ■

Teorema 87 (Recta de Simson).

Las proyecciones desde un punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo (distinto de los vértices del triángulo) a los lados o sus prolongaciones, son colineales.

Demostración. (Ver Figura 39.)

Sea P un punto de la circunferencia $C(O, r)$ con P distinto de A, B, C y

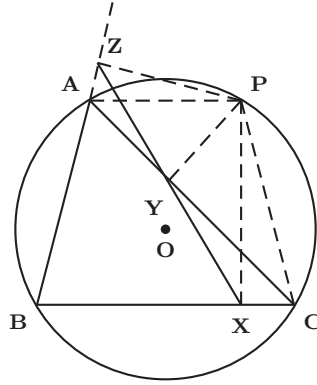


Figura 39.

$P \in \widehat{AC}$, sean X, Y, Z las proyecciones de P sobre los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente o sobre sus prolongaciones.

Veamos que X, Y y Z son colineales.

Primero veamos que si $Z - A - B$, entonces $B - X - C$. En efecto, como el cuadrilátero $ZPXB$ es cíclico y Z y X están en semiplanos opuestos con respecto a la recta \overleftrightarrow{BP} (donde \overline{BP} es diámetro y \overline{BP} es menor que el diámetro de $C(O, r)$) y Z es exterior a la $C(O, r)$ entonces X es interior a la $C(O, r)$, porque cuando dos circunferencias se interceptan un arco de una de ellas queda en el exterior y el otro arco queda en el interior de la otra circunferencia y por lo tanto $X \in \overline{BC}$, es decir $B - X - C$.

Segundo, veamos que $\widehat{AYZ} \cong \widehat{XYC}$.

Como el cuadrilátero $AYPZ$ es cíclico, entonces

$$\widehat{APZ} \cong \widehat{AYZ}, \quad (1)$$

y como los triángulos rectángulos $\triangle PYC$ y $\triangle PXC$ tienen hipotenusa común, entonces el cuadrilátero $PYXC$ es cíclico, y por tanto

$$\widehat{CPX} \cong \widehat{CYX}, \quad (2)$$

Por otro lado, como el cuadrilátero $ABCP$ es cíclico, entonces \widehat{APC} es suplemento de \widehat{B} y también, como el cuadrilátero $ZPXB$ es cíclico, entonces \widehat{ZPX} es suplemento de \widehat{B} , por lo tanto

$$\widehat{APC} \cong \widehat{ZPX}, \quad (3)$$

de (1), (2) y (3) y por resta de ángulos congruentes,

$$\widehat{ZPA} \cong \widehat{CPX}$$

luego

$$\widehat{ZYA} \cong \widehat{XYC}$$

como Z y X están en semiplanos opuestos con respecto a \overleftrightarrow{AC} y A, Y, C son colineales, entonces por el axioma de construcción de ángulo, Z, Y, X son colineales. ■

Teorema 88 (Teorema de Steiner-Lehmus).

Si un triángulo tiene dos bisectrices congruentes entonces el triángulo es isósceles.

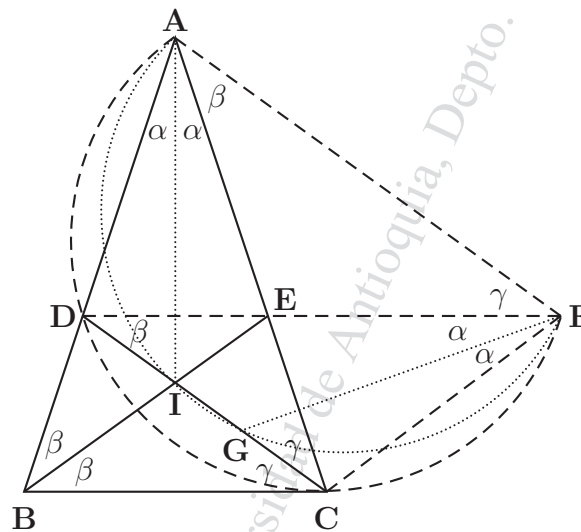


Figura 40.

Demostración. (Ver Figura 40.)

Por hipótesis, \overline{BE} es bisectriz del ángulo \widehat{B} y \overline{CD} es bisectriz del ángulo \widehat{C} y además $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.

Por el axioma de construcción de ángulo, existe una semirrecta \overrightarrow{CF} contenida en el semiplano de borde \overleftrightarrow{CD} y que contiene al punto A , tal que $\widehat{DCF} \cong \widehat{AEB}$ y por el axioma de construcción de segmento, existe un punto $F \in \overrightarrow{CF}$ tal que $\overline{CF} \cong \overline{AE}$, por lo tanto $\triangle DCF \cong \triangle AEB$ (L-A-L), luego

$$m(\widehat{FDC}) = m(\widehat{ABE}) = \hat{\beta}, \quad m(\widehat{DFC}) = m(\widehat{BAE}) = 2\hat{\alpha}$$

por esto y por el Teorema 85, el cuadrilátero $ADCF$ es cíclico, sea S la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero $ADCF$, luego por el Teorema del ángulo inscrito

$$m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{CAF}) = \hat{\beta}, \quad m(\widehat{AFD}) = m(\widehat{ACD}) = \hat{\gamma}$$

Sea \overline{FG} la bisectriz del ángulo \widehat{DFC} y sea \overline{AI} la bisectriz del ángulo \widehat{BAC} y como son bisectrices de los triángulos congruentes $\triangle DCF$ y $\triangle AEB$, entonces

$$\overline{FG} \cong \overline{AI}, \quad m(\widehat{IAE}) = m(\widehat{DFG}) = \hat{\alpha}$$

Como el ángulo \widehat{CGF} es exterior al $\triangle GDF$, entonces por el Teorema del ángulo exterior

$$m(\widehat{CGF}) = \hat{\beta} + \hat{\alpha} = m(\widehat{IAE}) + m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{IAF})$$

Puesto que \widehat{IGF} y \widehat{FGC} forman par lineal (o sea que son suplementarios) entonces \widehat{IAF} y \widehat{IGF} son suplementarios, por lo tanto el cuadrilátero $IGFA$ es cíclico; sea S' la circunferencia que circunscribe a éste cuadrilátero y como las cuerdas \overline{AI} y \overline{FG} son congruentes, entonces $\widehat{AI} \cong \widehat{FG}$, por lo tanto $\overline{AF} \parallel \overline{IG}$ y por lo tanto el cuadrilátero $AIGF$ es un trapecio isósceles, en consecuencia los ángulos de la base son congruentes o sea

$$\hat{\beta} + \hat{\alpha} = \hat{\gamma} + \hat{\alpha}$$

luego $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ y por el teorema del triángulo isósceles, el $\triangle ABC$ es isósceles. ■

Definición 55 (Polígono regular). Decimos que un polígono es regular si todos sus lados y todos sus ángulos son congruentes.

Teorema 89.

Todo polígono regular es cíclico.

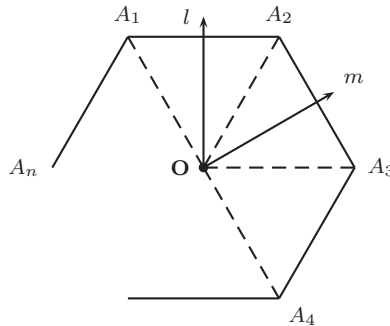


Figura 41.

Demostración. (Ver Figura 41.)

Veamos que existe un punto O tal que

$$\overline{OA_1} \cong \overline{OA_2} \cong \overline{OA_3} \cong \overline{OA_4} \cong \dots \cong \overline{OA_n}$$

Sean l y m mediatrices de $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_2A_3}$ respectivamente, luego, por el corolario 13 y las propiedades de la mediatriz, existe $O \in l \cap m$ tal que

$$\overline{OA_1} \cong \overline{OA_2} \cong \overline{OA_3}$$

y como $\overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3}$ (por definición de polígono regular), entonces el

$$\triangle OA_1A_2 \cong \triangle OA_2A_3 \quad (\text{por el criterio L-L-L}),$$

luego por la definición de triángulos congruentes y el Teorema del triángulo isósceles,

$$\widehat{OA_1A_2} \cong \widehat{OA_2A_1} \cong \widehat{OA_2A_3} \cong \widehat{OA_3A_2}.$$

Sea α la medida de todos los ángulos congruentes del polígono regular, entonces

$$m(\widehat{OA_1A_2}) = m(\widehat{OA_2A_1}) = m(\widehat{OA_2A_3}) = m(\widehat{OA_3A_2}) = \frac{\alpha}{2}$$

por lo tanto $m(\widehat{OA_3A_4}) = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ o sea que $\widehat{OA_2A_3} \cong \widehat{OA_3A_4}$ y como $\overline{OA_2} \cong \overline{OA_3}$ y $\overline{A_2A_3} \cong \overline{A_3A_4}$ entonces, por el criterio L-A-L,

$$\triangle OA_2A_3 \cong \triangle OA_3A_4,$$

luego $\overline{OA_3} \cong \overline{OA_4}$.

Similarmente se demuestra que

$$\overline{OA_4} \cong \overline{OA_5}, \dots, \overline{OA_{n-1}} \cong \overline{OA_n}, \quad \overline{OA_n} \cong \overline{OA_1} \quad \blacksquare$$

Como en una circunferencia todas las cuerdas congruentes equidistan del centro, entonces este teorema garantiza la verdad de la siguiente definición para un polígono regular.

Definición 56 (Apotema). *Se llama apotema de un polígono regular, a la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita a cada lado del polígono.*

El siguiente corolario se deja como ejercicio.

Corolario 30. *Todo polígono regular circunscribe una circunferencia.*

Nota: un polígono regular de n lados lo denotamos por P_n , su lado lo denotamos por l_n , su apotema por a_n y su perímetro por p_n , claramente

$$p_n = n \cdot l_n$$

6.7. Ejercicios y Problemas de la circunferencia

1. En una circunferencia $C(O, r)$, el diámetro \overline{AB} forma con la cuerda \overline{AC} un ángulo de 30° ; se traza una tangente en el punto C que intercepta la prolongación del diámetro \overline{AB} en el punto D . Demostrar que el $\triangle ACD$ es isósceles.
2. Tres puntos A, B y C de una circunferencia son tales que:

$$m(\widehat{AB}) = 80^\circ; m(\widehat{BC}) = 80^\circ.$$

Se unen los puntos A, B y C al centro O . Calcular las medidas de los ángulos en O y de los ángulos del triángulo ABC .

3. En una circunferencia de centro O se trazan dos cuerdas $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, \overline{AB} sub-tiende un arco de 120° . Desde el centro O se trazan $\overline{ON} \perp \overline{AB}$ en N y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ en M .
 - a) Encontrar $m(\widehat{BAC})$
 - b) Mostrar que \overrightarrow{AO} es bisectriz de \widehat{BAC} .
 4. Sean dos circunferencias de centros O y O' tangentes en A . Trazar por el punto A , la tangente común a esas dos circunferencias. Por un punto $P (\neq A)$ de esa tangente, trazar dos tangentes a las circunferencias O y O' . Sean B y C los respectivos puntos de tangencia. Las rectas \overleftrightarrow{BO} y $\overleftrightarrow{CO'}$ se cortan en un punto D . Demostrar:
 - a) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$.
 - b) P, B, C y D están sobre una misma circunferencia.
 - c) \overrightarrow{PD} es mediatriz de \overline{BC} .
 5. Demostrar que un trapecio isósceles es cíclico y que sus diagonales se cortan en el diámetro perpendicular a las bases.
 6. Dos circunferencias iguales de centros O y O' se cortan en A y en B . Por el punto A , trazamos una secante que corta a la circunferencia de centro O en C y a la circunferencia de centro O' en D . Probar que el triángulo CBD es isósceles.
-

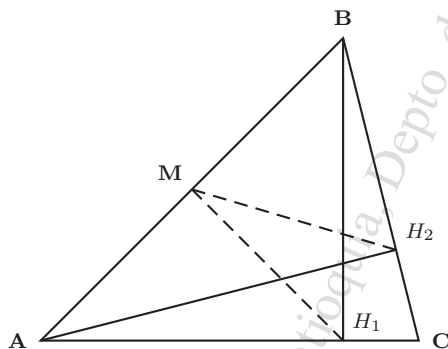
7. Si se tiene un paralelogramo inscrito en una circunferencia entonces este es un rectángulo.
8. En una circunferencia con centro O se tienen dos radios \overline{OA} y \overline{OB} perpendiculares entre si. En sentido contrario a las manecillas del reloj se trazan dos cuerdas \overline{AM} y \overline{BN} congruentes. Probar que $\overline{AM} \perp \overline{BN}$.
9. Sea el ΔABC con $\overline{AB} > \overline{AC}$, sea $P \in \overline{BC}$ y $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PN} \perp \overline{AC}$, sea $PM = x$ y $PN = y$. Demostrar que

$$h_b > x + y > h_c$$

10. Se tienen dos circunferencias O y O' secantes, que se cortan en los puntos A y B . Por A se traza una recta secante a las dos circunferencias que corta la circunferencia O en M y la circunferencia O' en M' . Por B se traza otra secante a las dos circunferencias que corta la circunferencia O en N y la circunferencia O' en N' . Pruebe que $\overline{MN} \parallel \overline{M'N'}$.
11. Sea \overline{AB} diámetro en la circunferencia $C(O, r)$ y sea $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$, con $D, C \in C(O, r)$. Demostrar que $\widehat{DC} \cong \widehat{CB}$ y $\overline{OC} \perp \overline{DB}$.
12. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito una circunferencia la cuerda \overline{AB} sub-tiende un arco igual a $\frac{1}{6}$ de la circunferencia; la cuerda \overline{DC} un arco igual a $\frac{1}{3}$ de la circunferencia y la diagonal \overline{BD} , un arco DAB igual a $\frac{5}{12}$ de la circunferencia:
 a) Indicar la naturaleza del cuadrilátero $ABCD$.
 b) Calcular los ángulos formados por las diagonales.
 c) Si se prolongan los lados \overline{AD} y \overline{BC} , calcular el ángulo formado por ellos.
13. En una circunferencia se traza una cuerda diametral \overline{AB} y una cuerda \overline{AC} , tal que $m\angle BAC = 20^\circ$, se traza una recta $\overleftrightarrow{ZZ'}$ tangente a la circunferencia en D y paralela a \overline{AC} . Hallar el valor de los ángulos $\angle ADZ$ y $m\angle BDZ'$.
 (Rta.: 35° , 55° .)
14. Dos circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ son tangentes en el punto A , se trazan dos secantes por A que cortan a $C(O, r)$ y $C(O', r')$ en los puntos

B, B' y C, C' respectivamente. Demostrar que \overleftrightarrow{BC} y $\overleftrightarrow{B'C'}$ son paralelas. Hacer la demostración para los dos casos: tangentes exteriormente y tangentes interiormente.

15. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A , I el centro de la circunferencia en la cual está circunscrito el triángulo. Demostrar que la hipotenusa es el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia que pasa por los puntos B, C, I .
16. Un triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia $C(O, r)$; se trazan las alturas \overline{AD} y \overline{BF} , que se cortan en H ; se prolonga \overline{AD} hasta que encuentre a $C(O, r)$ en M . Demostrar que $\overline{HD} \cong \overline{DM}$.
17. Sea M el punto medio del lado \overline{AB} en el $\triangle ABC$ y sean $\overline{AH_2}$ y $\overline{BH_1}$ alturas. Mostrar que $\triangle H_1MH_2$ es isósceles. (Ver figura)



18. Por un punto A de la cuerda diametral \overline{DE} de una circunferencia, se trazan dos cuerdas $\overline{CC'}$ y $\overline{BB'}$ igualmente inclinadas sobre la cuerda diametral, cortándola en el punto A entre O y E , con B, C en un semiplano y B', C' en el semiplano opuesto con respecto a \overleftrightarrow{DE} .
 - a) Indicar la naturaleza del cuadrilátero $BCB'C'$ (Justificar).
 - b) probar que el cuadrilátero $CBOA$ es cíclico.
19. Demostrar que las tres alturas de un triángulo son las bisectrices de los ángulos del triángulo determinado por los pies de dichas alturas.
20. Construir un trapecio isósceles, dadas las bases y una diagonal.

21. Demostrar que en todo triángulo, la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.
22. A, B, C, D están sobre una circunferencia, $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$, demuestre: $ABCD$ es un trapecio isósceles.
23. $C(O)$ circunferencia de centro O . $D, C \in C(O)$, \overline{AB} es diámetro, $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. Demostrar: $\widehat{DC} \cong \widehat{CB}$, $\overline{OC} \perp \overline{BD}$.
24. \overline{AB} es diámetro de $C(O)$, $C, D \in C(O)$. $\overline{OC} \perp \overline{DB}$. Demostrar: $\widehat{DC} \cong \widehat{CB}$, $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$.
25. A, B, C, D están en $C(O)$. \overrightarrow{AC} es bisectriz de \widehat{BAD} , I es el incentro del triángulo $\triangle ABD$. Demuestre: $\overline{CB} \cong \overline{CI} \cong \overline{CD}$.
26. Demostrar que si dos circunferencias son secantes, la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda determinada por los puntos de intersección de las dos circunferencias.
27. Demostrar que todo trapecio, inscrito en una circunferencia, es isósceles.
28. Demostrar que todo rombo, inscrito en una circunferencia, es un cuadrado.
29. Demostrar que la medida del lado de un hexágono regular inscrito, es igual al radio de la circunferencia.
30. Demostrar que en un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las medidas de dos lados opuestos, es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados.
31. Se prolongan los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico hasta cortarse en los puntos M y N . Demostrar que las bisectrices de \widehat{M} y \widehat{N} son perpendiculares.
32. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos segmentos tangentes. Los puntos de tangencia determinan dos arcos cuyas medidas están en la relación de 4 a 1. Calcular:
 - a) la medida del ángulo formado por las dos tangentes, b) la medida de los ángulos semi-inscritos que se forman al trazar la cuerda que une los

puntos de tangencia, c) la medida de los arcos sub-tendidos por las dos tangentes y d) la medida del ángulo central que se forma al trazar los segmentos radiales a los puntos de tangencia.

(Rta.: a) 108° , b) 36° , c) 72° y 288° , d) 72°)

33. Se inscribe un triángulo isósceles ABC en un circunferencia. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, \overrightarrow{AX} bisectriz de \widehat{BAC} ; X pertenece a la circunferencia. Demostrar que \overrightarrow{AX} pasa por el centro del circunferencia y que \widehat{ABX} es recto.
34. El triángulo ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y esta inscrito en una circunferencia. $X \in \widehat{BC}$. Demuestre que \overrightarrow{XA} es bisectriz de \widehat{BXC} .
35. Se tienen dos circunferencias exteriores y se trazan las tangentes interiores a éstas. Demostrar que los segmentos de éstas tangentes determinados por los puntos de tangencia son congruentes y que el punto de intersección de dichas tangentes y los centros de las dos circunferencias son colineales.
36. Se tienen dos circunferencias no congruentes. Si a dichas circunferencias se les trazan dos tangentes exteriores, demostrar que los segmentos determinados por los puntos de tangencia son congruentes y que si se prolongan dichas tangentes hasta que se intersecten en un punto P , este punto es colineal con los centros de las dos circunferencias.
37. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ en el trapecio $ABCD$. \overrightarrow{AY} es bisectriz de \widehat{A} . \overrightarrow{BY} es bisectriz de \widehat{B} . \overrightarrow{CX} es bisectriz de \widehat{C} . \overrightarrow{DX} es bisectriz de \widehat{D} . $\overrightarrow{DX} \cap \overrightarrow{AY} = \{M\}$, $\overrightarrow{CX} \cap \overrightarrow{BY} = \{N\}$. Demostrar que $MXNY$ es cíclico y \overline{XY} es diámetro de la circunferencia circunscrita a $MXNY$.
38. $C(O, r)$ y $C(O_1, r_1)$ son dos circunferencias no congruentes, tangentes en T . $A, C \in C(O, r)$ y $B, D \in C(O_1, r_1)$. $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{T\}$. Demostrar que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.
39. Sean $C(O, r)$, $C(O', r')$ secantes en A y B . Por B se traza el segmento \overline{MN} , con $M \in C(O, r)$ y $N \in C(O', r')$. Demostrar que el ángulo \widehat{MAN} permanece constante cuando M y N se mueven sobre las circunferencias.

40. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden X y Y y cuya hipotenusa mide Z , mide:

$$\frac{1}{2}(X + Y - Z).$$

41. Un rectángulo esta inscrito en una circunferencia. Por los vértices del rectángulo se trazan tangentes a la circunferencia que se intersectan dos a dos. Demostrar que el cuadrilátero formado por las tangentes al intersectarse, forman un rombo.
42. Desde el punto medio de un arco \widehat{AB} se trazan dos cuerdas \overline{MC} y \overline{MD} que intersectan a \overline{AB} en los puntos H y K respectivamente. Demostrar que $HKDC$ es cíclico o inscriptible.
43. Sean t , t' y t'' rectas tangentes a la circunferencia $C(O, r)$ en los puntos P , Q y R respectivamente y sea $\{A\} = t \cap t'$ y $\{B\} = t' \cap t''$, si $t \parallel t''$, demostrar que $\triangle AOB$ es rectángulo.
44. La recta \overleftrightarrow{AB} es secante a una circunferencia en A y B . Por el punto B se traza la cuerda $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. Demostrar que el diámetro paralelo a \overline{AB} biseca al segmento cuyas extremos son C y un punto cualquiera de la recta \overleftrightarrow{AB} .
45. El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en la circunferencia de centro O . \overline{AD} es la altura correspondiente a \overline{BC} y H es el ortocentro. N, Q, P son los puntos medios de \overline{AH} , \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente. Demostrar que $OPNQ$ es un paralelogramo. (Trace \overline{BH} , \overline{OP} y \overline{OH}).
46. Sean dos circunferencias de centros O y O' , secantes en A y B . Desde A se trazan los diámetros \overline{AOC} y $\overline{AO'D}$. Se une C con D . Demostrar que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y que C, B y D están alineados.
47. Por un punto A exterior a una circunferencia de centro O , se traza una tangente \overline{AB} a la circunferencia en B y se traza \overline{AO} . Sobre \overline{AO} se toma $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ y se traza \overline{BC} que corta la circunferencia en E . Probar que $\overline{EO} \perp \overline{OA}$.
48. Demostrar que si las cuerdas \overline{AB} y \overline{BC} , trazadas en una misma circunferencia de centro O son congruentes, entonces el radio \overline{OB} divide la cuerda \overline{AC} y el arco \widehat{ABC} en partes iguales respectivamente.

49. Por los extremos A y B de un diámetro de una circunferencia de centro O , se trazan dos cuerdas paralelas \overline{AC} y \overline{BD} .
- Mostrar que esas cuerdas equidistan del centro O y por consiguiente son congruentes.
 - Mostrar que el segmento \overline{DC} es un diámetro.
 - Cual es la naturaleza del cuadrilátero $ABCD$?
50. Un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$) esta inscrito en una circunferencia de centro O . Las bisectrices \overrightarrow{BD} y \overrightarrow{CF} de los ángulos de la base cortan la circunferencia en D y F .
Comparar los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle BAD$.
51. Sea el $\triangle ABC$ rectángulo en B , sean M, N, L los puntos medios de la hipotenusa y los catetos respectivamente, por M, N, L se hace pasar una circunferencia. Mostrar que el arco exterior a la hipotenusa es igual a la diferencia de los arcos exteriores a los catetos.
52. La recta l es secante a la $C(O, r)$ en A y B . Por el punto B se traza la cuerda $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. Demostrar que el diámetro paralelo a \overline{AB} biseca el segmento cuyos extremos son C y un punto cualquiera de la recta l .
53. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas que concurren en un punto que esta sobre una circunferencia dada. Justifique.
54. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia, paralelas a una recta dada. Justifique.
55. Hallar los ángulos de un cuadrilátero cíclico $ABCD$, sabiendo que la diagonal \overline{AC} forma con los lados \overline{AB} y \overline{AD} ángulos de 45° y con la diagonal \overline{BD} un ángulo de 70° .
56. Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito a la $C(O, r)$, sea N el punto de tangencia de la circunferencia con el lado \overline{AB} , R el punto de tangencia de la circunferencia con el lado \overline{BC} , S el punto de tangencia de la circunferencia con el lado \overline{CD} y M el punto de tangencia de la circunferencia con el lado \overline{DA} , si $m(\widehat{MS}) = 108^\circ$, $m(\widehat{SR}) = 120^\circ$ y $m(\widehat{RN}) = 45^\circ$. Hallar:
-

- a) las medidas de los ángulos \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} y \widehat{D} .
 b) las medidas de los ángulos del cuadrilátero inscrito $MNRS$.

57. Sean \overleftrightarrow{BA} y \overleftrightarrow{BD} rectas tangentes a la circunferencia $C(O, r)$ en los puntos A, D , sea $C \in \overline{BA}$, sea \overleftrightarrow{CE} tangente a la circunferencia en E . Demostrar que $\widehat{BOC} \cong \widehat{DAE}$.

58. Demostrar que una circunferencia es inscriptible en un cuadrilátero $ABCD$ sii la suma de las medidas de los lados opuestos son iguales, es decir, sii $AB + CD = BC + AD$. (Ayuda: suponga que $AB > BC$)

Construcciones con regla y compás.

59. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y su centro se encuentre sobre una recta dada.
60. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado, pase por un punto dado y sea tangente a una recta dada.
61. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado, pase por un punto dado y sea tangente a otra circunferencia dada.
62. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a dos rectas dadas que se interceptan.
63. Trazar una circunferencia que pase por un punto y sea tangente a dos rectas paralelas dadas.
64. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a una circunferencia y a una recta dadas.
65. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a dos circunferencias dadas.
66. Trazar una tangente a una circunferencia que sea paralela a una recta l dada.
67. Construir una circunferencia que sea tangente a una recta dada en un punto dado sobre esta recta y pase por otro punto dado.
68. Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y sobre ella, el pie de la bisectriz del ángulo recto.

6.7. EJERC. Y PROBLEMAS DE LA CIRCUNFERENCIA 199

69. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas no paralelas dadas y que tenga su centro sobre una recta dada secante a las dos primeras y que no pase por el punto de intersección de ellas dos.
70. Construir un triángulo dados:
a) a, α, m_a . b) a, α, h_a . c) h_a, m_a, α .
71. Trazar las tangentes exteriores y las interiores a dos circunferencias exteriores.
72. Construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas (dos casos: cuando las tres rectas son secantes y cuando dos de las rectas son paralelas).