Tema 3: Fuerzas eléctricas y campo eléctrico

Fundamentos Físicos de la Ingeniería

Ingeniería Industrial

Primer curso

Índice

Introducción

- “Elektron” es un vocablo griego que significa ámbar
- Al frotar el ámbar éste atrae pequeños objetos (pajitas, plumas,...)
- La electricidad es un fenómeno muy presente en la vida diaria:
  - Fenómenos de electricidad estática
  - Ingeniería: máquinas y motores eléctricos

Carga eléctrica

- Evidencia experimental:
  - Dos barras de plástico frotadas con piel se repelen
  - Dos barras de vidrio frotadas con seda se repelen
  - La barra de vidrio y la de plástico se atraen
- Se dice que las barras **están cargadas**
- Hay **dos tipos de carga:**
  - Carga positiva
  - Carga negativa

Propiedades de la carga

- **Cuantización**
  - La carga esta cuantizada: $Q = \pm Ne$
  - Donde e es la unidad fundamental de carga, que coincide con el valor absoluto la carga del electrón
  - Usualmente N es muy grande
- **Conservación de la carga**
- Unidades: culombio (C) $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C
- *Ejemplo:* la carga trasvasada al frotar dos objetos es del orden de 50 nC:

$$N = \frac{50\text{nC}}{e} = \frac{50 \times 10^{-9}\,\text{C}}{1.60 \times 10^{-19}\,\text{C}} \approx 3 \times 10^{11}$$

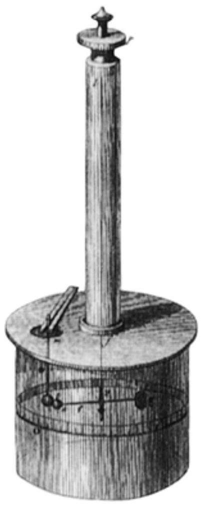
Aislantes y conductores

Clasificación de la materia atendiendo a sus propiedades de *conducción eléctrica*

- **Conductores**: la carga puede desplazarse por su interior con facilidad
  - Ejemplo: metales
- **Aislantes**: La carga no puede moverse libremente
  - Cuando se cargan por frotación la carga queda confinada en la región frotada.
  - Ejemplos: vidrio, caucho, madera.

Índice

Ley de Coulomb

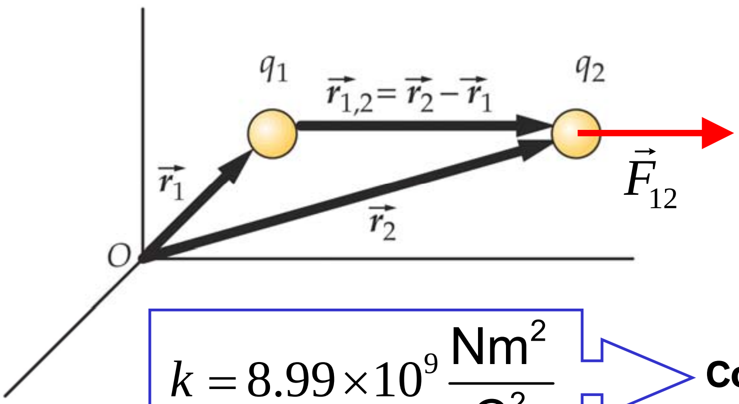


Balanza de torsión

- Fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra
  - Está dirigida a lo largo de la línea que las une
  - Disminuye con el cuadrado de la distancia que separa las cargas
  - Es proporcional al producto de las cargas
  - Es repulsiva para cargas del mismo signo y atractiva para cargas de signo contrario

Ley de Coulomb

- Representación matemática:



$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

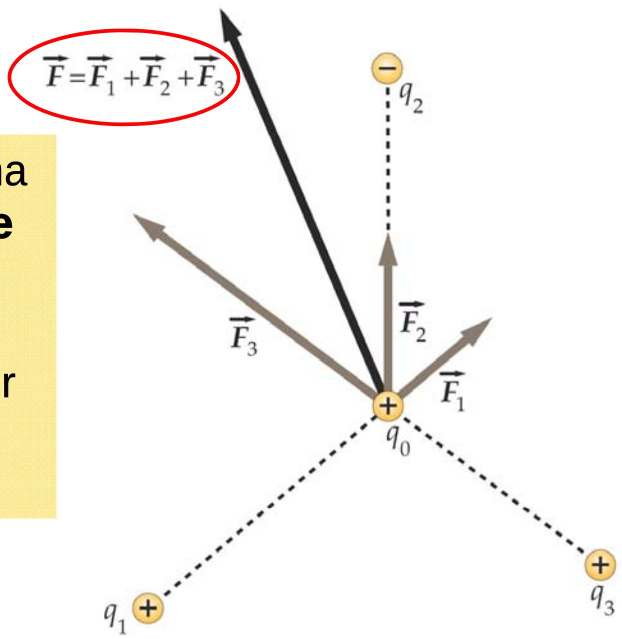
$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$k = 8.99 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

Constante de Coulomb
Medida experimentalmente

Principio de superposición

Cuando tenemos un sistema de cargas la **fuerza sobre cada carga** es la **suma vectorial** de las **fuerzas individuales** ejercidas por cada una de las **demás cargas**



Principio experimental

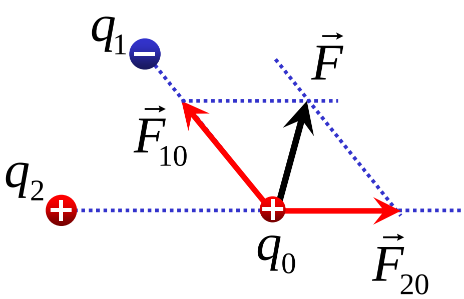
Índice

Campo eléctrico: introducción

- La fuerza entre cargas puede verse como una **acción a distancia**.
- Una visión alternativa es la del **campo eléctrico**:
  - Una carga crea un campo eléctrico en todo el espacio: magnitud vectorial
  - El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre otras cargas

Campo eléctrico: definición

- En un punto colocamos una carga de prueba: q_0
- No perturba la distribución de cargas original ($q_0 \to 0$)
- **Campo eléctrico**: cociente entre la fuerza eléctrica que actúa sobre la partícula y la carga de la partícula



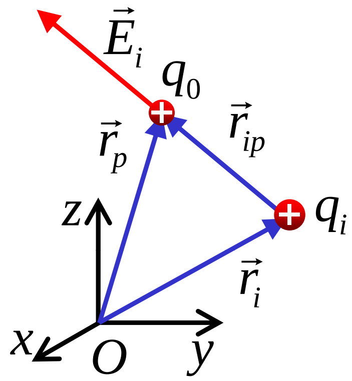
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

- Magnitud vectorial
- Dirección de $\vec{F}$
- Independiente de q_0
- Unidades: N/C

Campo de una carga puntual

- Tenemos una carga puntual q_i
- Situamos una carga de prueba q_0
- Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{i0} = k\frac{q_i q_0}{r_{ip}^2}\hat{r}_{ip}$$



$i \longrightarrow$ Punto fuente

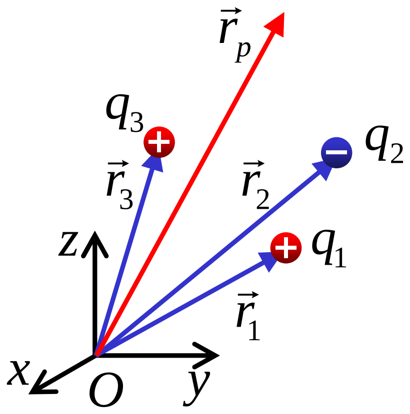
$p \longrightarrow$ Punto campo

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_{i0}}{q_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_i = k\frac{q_i}{r_{ip}^2}\hat{r}_{ip}}$$

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL

Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales

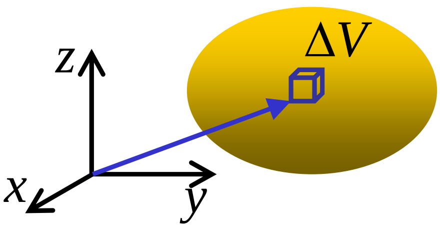


- Principio de superposición para el campo eléctrico
  - Es una consecuencia del principio de superposición para la fuerza
  - El campo eléctrico de la distribución de cargas es la **suma vectorial** de los campos de cada carga puntual

$$\boxed{\vec{E}_p = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_{ip}^2} \hat{r}_{ip}}$$

Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

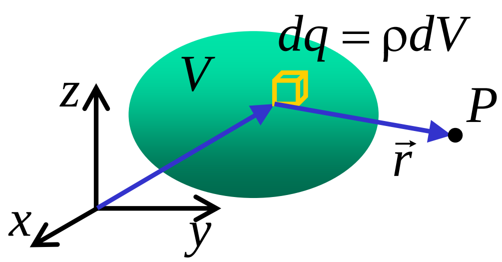
- Las distribuciones de carga son siempre discretas (cuantización de la carga)
- Cuando un punto de la distribución de cargas contiene un número muy alto de cargas discretas la distribución puede tratarse como una **distribución continua de carga**
- *Ejemplo:* sustancias líquidas y sólidas que se tratan como distribuciones continuas de masa



$$\rho_m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i m_i}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

$$dm = \rho_m dV \rightarrow m = \int_V \rho_m dV$$

Distribución volumétrica de carga



- Campo debido a un dq:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

- Campo total debido a la distribución en V :

$$\vec{E} = \int_V k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

- Distribución volumétrica de carga:

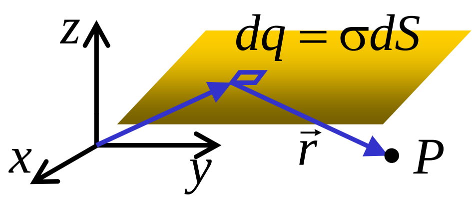
Densidad de carga: ρ

$$dq = \rho dV$$

$$\boxed{\vec{E} = \int_V k\frac{\rho dV}{r^2}\hat{r}}$$

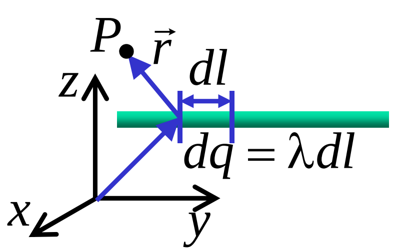
Distribuciones superficial y lineal de carga

- Distribución superficial de carga:



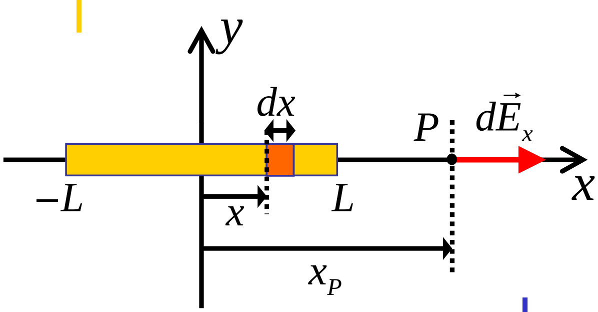
$$\boxed{\vec{E} = \int_S k\frac{\sigma dS}{r^2}\hat{r}}$$

- Distribución lineal de carga:



$$\boxed{\vec{E} = \int_L k\frac{\lambda dl}{r^2}\hat{r}}$$

Ejemplo: Campo sobre el eje de una carga lineal finita



Distribución uniforme: $\lambda = \dfrac{Q}{2L}$

$$dE_x = \frac{kdq}{(x_P - x)^2} = \frac{k\lambda dx}{(x_P - x)^2}$$

$$E_x = k\lambda \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(x_P - x)^2} \quad \left| \begin{array}{l} u = x_P - x \\ du = -dx \end{array} \right| \quad = -k\lambda \int_{x_P+L}^{x_P-L} \frac{du}{u^2}$$

$$E_x = k\lambda \left(\frac{1}{x_P - L} - \frac{1}{x_P + L} \right) = \frac{2kL\lambda}{x_P^2 - L^2} = \boxed{\frac{kQ}{x_P^2 - L^2}} \qquad x_P > L$$

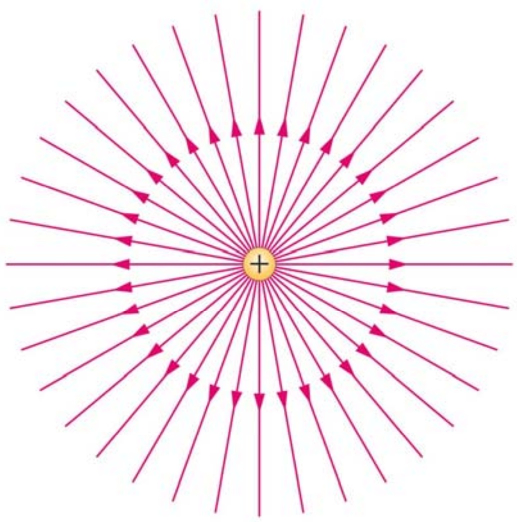
Índice

- Introducción
- Carga eléctrica
- Ley de Coulomb
- Principio de superposición
- Campo eléctrico
  - Campo de cargas puntuales
  - Campo de distribuciones continuas de carga
  - Líneas de campo eléctrico
  - Movimiento de cargas en un campo eléctrico
- Ley de Gauss

Líneas de campo eléctrico

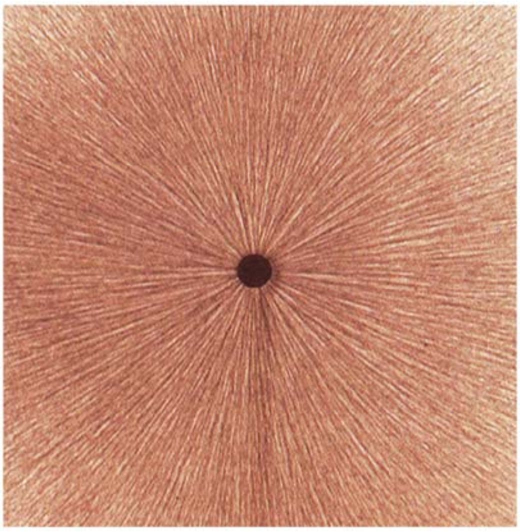
- Representación gráfica para visualizar el campo eléctrico
  - El campo eléctrico es tangente a la línea de campo
  - El módulo del campo eléctrico es mayor cuanto más próximas están las líneas de campo

Ejemplo: carga puntual



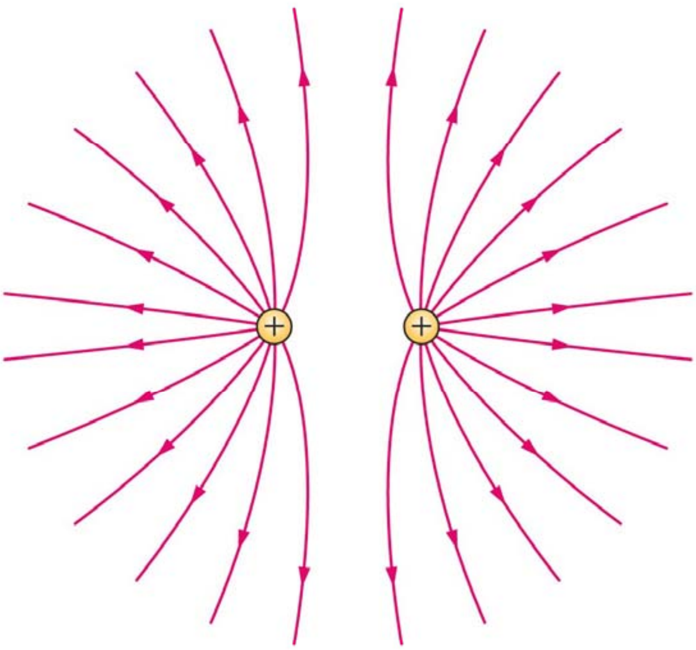
- Sólo dibujamos un número finito de líneas, pero existe el **campo en todo el espacio**
- Representación **bidimensional** de un campo **tridimensional**
- Línea de campo **no equivale a trayectoria** de una carga en ese campo

Ejemplo: carga puntual

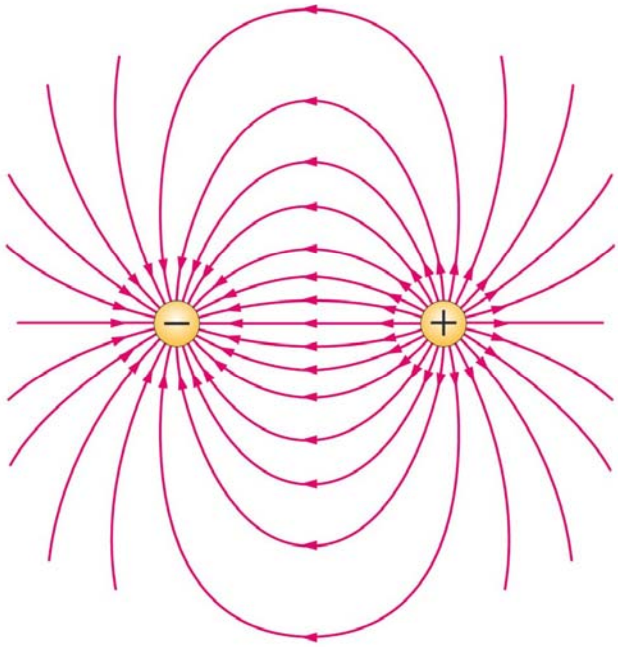


- Sólo dibujamos un número finito de líneas, pero existe el **campo en todo el espacio**
- Representación **bidimensional** de un campo **tridimensional**
- Línea de campo **no equivale a trayectoria** de una carga en ese campo

Dos cargas positivas iguales



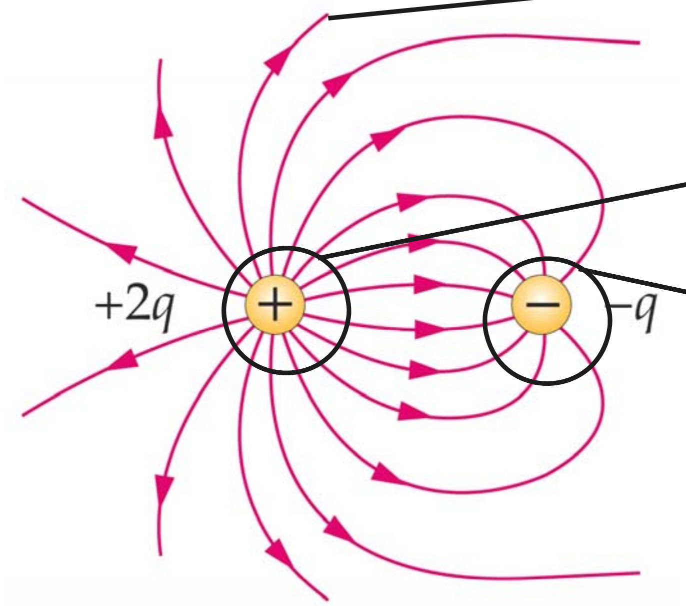
Cargas iguales con distinto signo: **dipolo eléctrico**



Reglas para representar líneas de campo

- Salen de las cargas positivas y terminan en las negativas
- Si hay exceso de carga positiva debe haber líneas que acaban en el infinito
- Si hay exceso de carga negativa debe haber líneas que salen del infinito
- Para cada carga puntual las líneas se dibujan entrando o saliendo de la carga y:
  - Uniformemente espaciadas
  - En número proporcional al valor de la carga
- Dos líneas de campo no pueden cruzarse

Ejemplo:



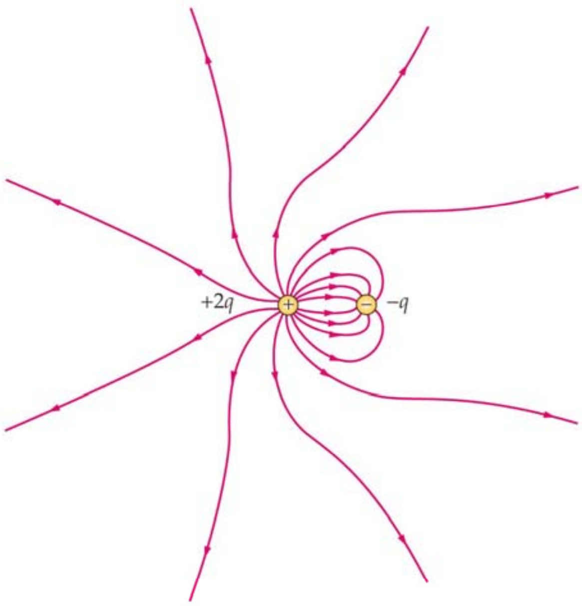
Exceso de carga **positiva**: líneas que terminan en el infinito

Salen 16 líneas equiespaciadas

Entran 8 líneas equiespaciadas

Líneas salen de la carga positiva y entran en la carga negativa

Líneas a distancias grandes

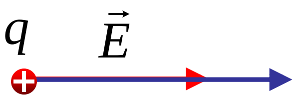


- A distancias grandes comparadas con la mayor distancia entre cargas del sistema:
  - Líneas igualmente espaciadas
  - Líneas radiales
- Equivalen a las líneas de una sola carga puntual con carga igual a la carga neta del sistema

Índice

Movimiento de cargas en un campo eléctrico

- Sea una partícula de masa m y carga q en el seno de un campo eléctrico:



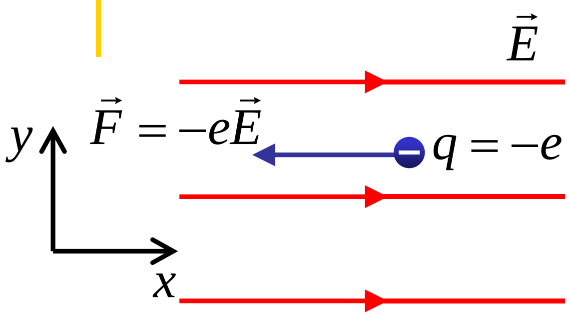
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- Segunda Ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E}$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

  - Si el campo es uniforme: movimiento uniformemente acelerado

Ejemplo 1: electrón en campo uniforme



$$\vec{F} = -eE\vec{i} = m\vec{a}$$

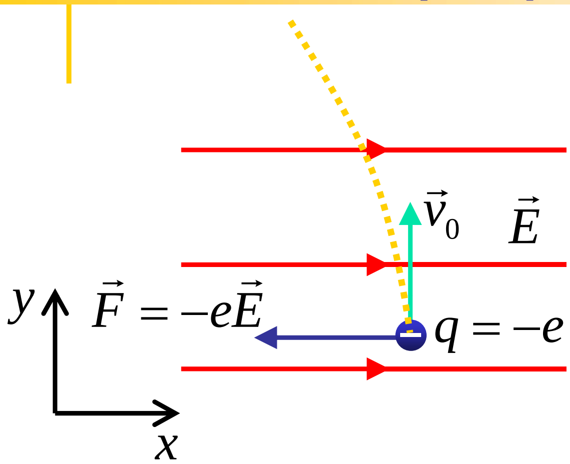
$$a = -\frac{eE}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v(x) - \cancelto{0}{v(0)} = \int_0^t a\,dt = at \longrightarrow v = -\frac{eE}{m}t = \frac{dx}{dt}$$

$$x - x_0 = \int_0^t at\,dt = a\frac{t^2}{2} \longrightarrow x = x_0 - \frac{eE}{2m}t^2$$

Movimiento uniformemente acelerado

Ejemplo 2: electrón con velocidad perpendicular al campo



- Eje y : movimiento rectilíneo uniforme

$$y = y_0 + v_0 t$$

- Eje x : movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$x = x_0 - \frac{eE}{2m}t^2$$

La trayectoria del electrón es una **parábola**, análogamente a la trayectoria de una masa con cierta velocidad inicial en un campo gravitatorio (tiro parabólico)

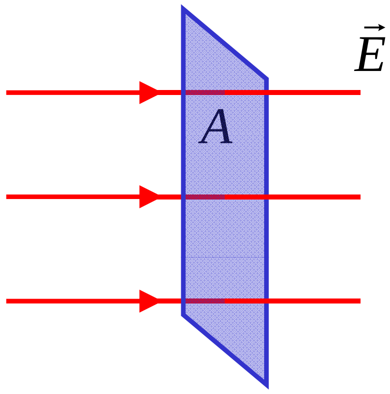
Índice

Ley de Gauss

- Ley general del electromagnetismo
- Útil para calcular campos eléctricos
- Sólo puede aplicarse para tal fin en situaciones en que la distribución de cargas tenga una alta simetría

Flujo eléctrico

- Magnitud proporcional al número de líneas de campo que atraviesan una superficie
- Supongamos E uniforme y superficie perpendicular

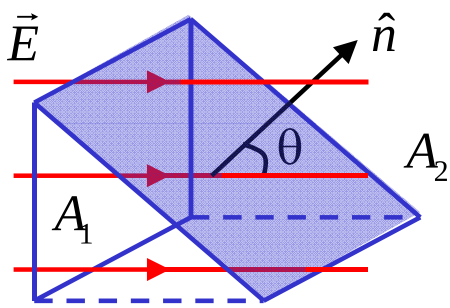


- Definimos: $\Phi = EA$ ← FLUJO
- Si $E^{'} = xE \rightarrow \Phi^{'} = x\Phi$
- Si $A^{'} = nA \rightarrow \Phi^{'} = n\Phi$

El flujo aumenta o disminuye proporcionalmente al número de líneas de campo que atraviesan la superficie

Flujo eléctrico

- Supongamos una superficie no perpendicular:



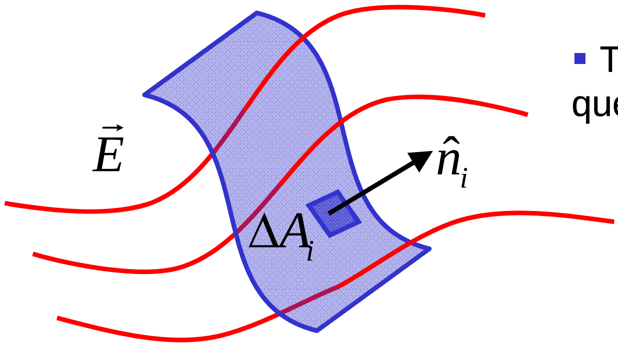
- A_1 es perpendicular a las líneas de campo
- A_1 es atravesada por el mismo número de líneas de campo que A_2 :

$$\Phi = EA_1 = EA_2 \cos\theta$$

- En general: $\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}} \rightarrow \Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA\cos\theta$

Flujo eléctrico

- Supongamos superficie arbitraria y campo no uniforme



- Tomamos ΔA_i tan pequeña que pueda considerarse:
  - Superficie plana
  - Campo eléctrico uniforme

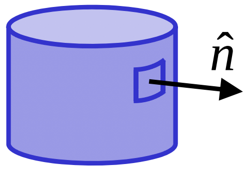
$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$$

- Flujo total: $\Phi \approx \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$; en el límite $\Delta A_i \to 0$:

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Flujo en una superficie cerrada

- Es aquella superficie que divide el espacio en dos regiones: interior y exterior
- A la hora de calcular el flujo en una superficie cerrada se toma por convenio el vector $\hat{n}$ hacia fuera de la superficie:

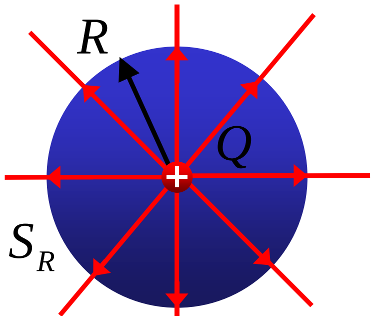


$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA}$$

- El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional al número **neto** de líneas que salen del volumen

Ley de Gauss

- Suponemos una carga puntual en el centro de una esfera de radio *R*



$$\vec{E}\cdot\hat{n} = E_n = k\frac{Q}{R^2}$$ → Radial

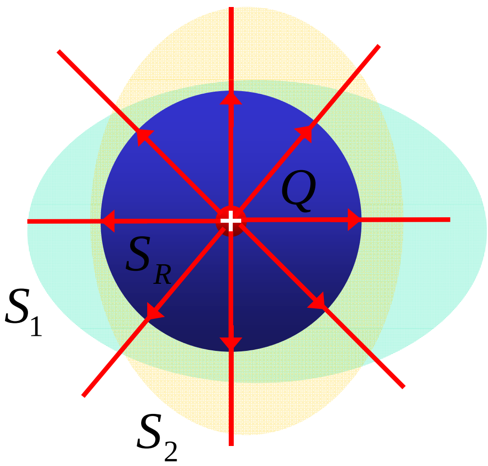
$$\Phi = \oint_{S_R} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_{S_R} E_n dA = E_n 4\pi R^2$$

$$\Phi = 4\pi k Q$$

- El flujo es independiente de R
- El flujo es proporcional a la carga dentro de la esfera

Ley de Gauss

- Supongamos otras superficies no necesariamente esféricas:



- A todas las superficies las atraviesa el mismo número de líneas
- Mismo flujo neto para todas las superficies:

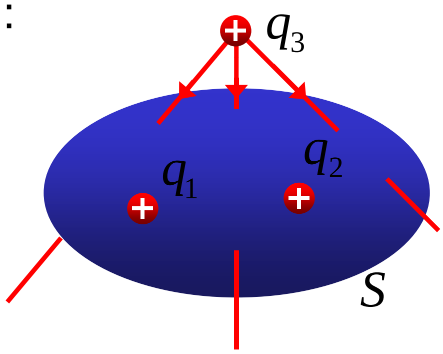
$$\Phi = 4\pi k Q$$

Ley de Gauss

- Supongamos un sistema de cargas:
  - Principio de superposición:

$$\Phi = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\cdot d\vec{A} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi = 4\pi k(q_1 + q_2)$$



  - Para la carga exterior:

$$\Phi_3 = \oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{A} = 0$$

Todas las líneas de campo que entran por un punto de la superficie salen por otro

Enunciado de la Ley de Gauss

El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es $4\pi k$ veces la **carga neta** dentro de la superficie

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

- A veces se escribe la constante de Coulomb en función de la **permitividad del espacio libre**:

$$\boxed{4\pi k = \frac{1}{\varepsilon_0}} \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

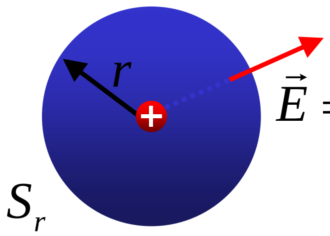
Aplicaciones de la Ley de Gauss

- Es una Ley válida para cualquier superficie y cualquier distribución de carga
- A veces es **útil para determinar el campo eléctrico** debido a una distribución de carga que tiene un **alto grado de simetría**
- La técnica consiste en emplear la ecuación de la Ley de Gauss buscando una superficie de integración (superficie gaussiana) tal que **el campo eléctrico pueda salir fuera de la integral**
  - Porque E_n sobre la superficie gaussiana sea constante ó nulo

Simetría esférica

- Carga puntual
  - Simetría: campo radial
  - Superficie gaussiana: esfera de radio r

$$\Phi = \int_{S_r} E_n dA = E_n \int_{S_r} dA = E_n 4\pi r^2 = 4\pi k q$$



$$\vec{E} = E_n \hat{n}$$

$$\boxed{E_n = k\frac{q}{r^2}}$$

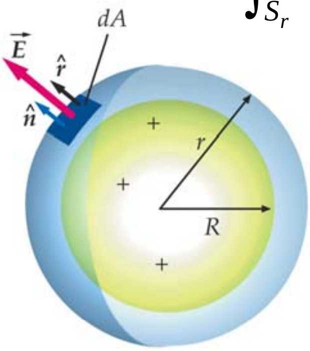
Simetría esférica

- Esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida en su volumen
  - Superficie gaussiana: esfera de radio r

$\boxed{r > R}$

$$\Phi = \int_{S_r} E_n dA = 4\pi k Q$$

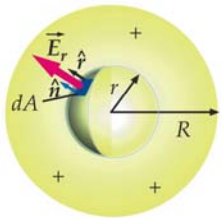
$$\Phi = E_n 4\pi r^2$$



$$\boxed{E_n = k\frac{Q}{r^2}}$$

$\boxed{r < R}$ $\Phi = E_n 4\pi r^2 = 4\pi k q_{\text{int}}$

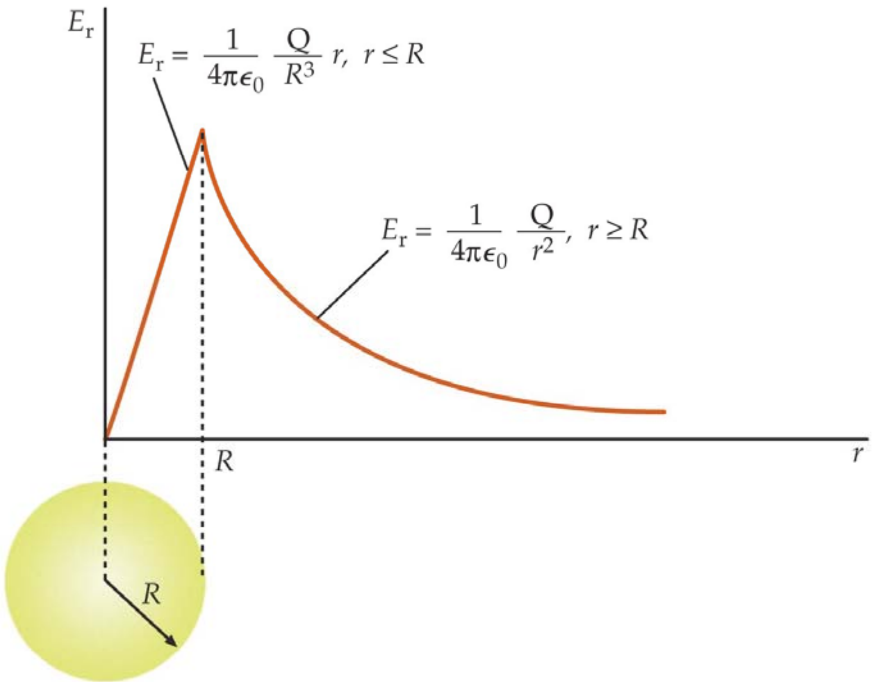
$$q_{\text{int}} = \rho 4\pi r^3/3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$



$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

$$\boxed{E_n = \frac{kQ}{R^3}r}$$

Esfera con carga uniforme en volumen



Simetría cilíndrica

- Campo debido a una carga lineal uniforme e infinita (λ)
  - Simetría: campo radial que depende de la distancia a la línea
  - Superficie gaussiana: cilindro longitud L y radio r coaxial con la línea de carga

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \int_{S_1} \cancel{\vec{E}\cdot\hat{n}dA} + \int_{S_2} \cancel{\vec{E}\cdot\hat{n}dA} + \int_{S_L} \vec{E}\cdot\hat{n}dA$$

$$\Phi = E_n 2\pi r L = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

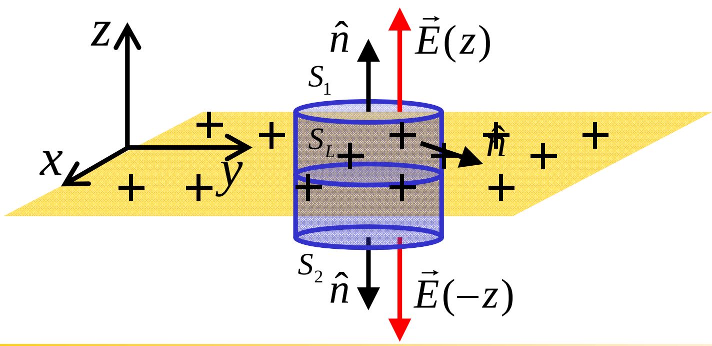
$$\boxed{E_n = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}}$$

Simetría plana

- Plano infinito uniformemente cargado
  - Simetría: $\vec{E}(z)$ perpendicular al plano e impar en z
  - Superficie gaussiana: “caja de pastillas”; $S_1=S_2=A$

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \int_{S_1} E(z)dA - \int_{S_2} E(-z)dA = 2E(z)A$$

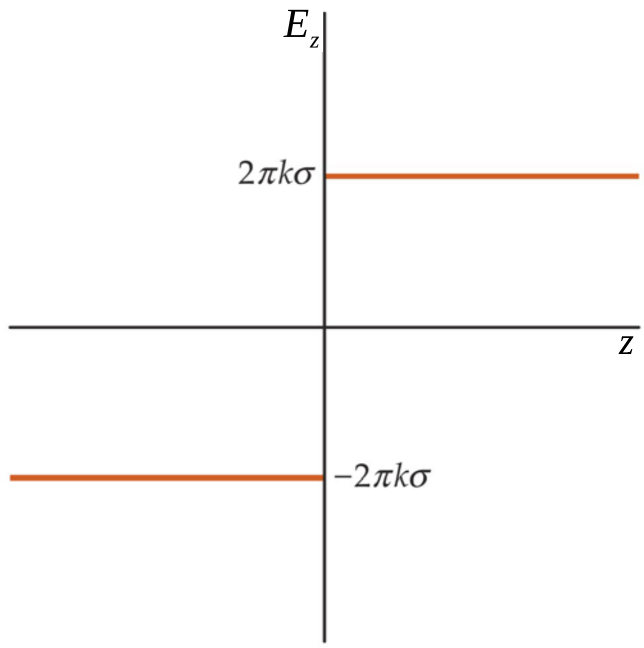
$$E(-z) = -E(z)$$



$$\Phi = 2E(z)A = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi k\sigma}$$

Simetría plana



Resumen

- La magnitud responsable de la interacción eléctrica de la materia es la **carga eléctrica**
  - Es una magnitud dual (carga positiva y carga negativa).
  - Está cuantizada.
  - La carga se conserva.
- La fuerza de interacción entre cargas puntuales viene dada por la **Ley de Coulomb**.
- La Ley de Coulomb y el **principio de superposición** permiten calcular la fuerza que cualquier distribución de carga, sea discreta o continua, ejerce sobre una carga.
- Se define el **campo eléctrico** como la fuerza eléctrica ejercida por una distribución de cargas sobre la unidad de carga en cualquier punto del espacio.
- El campo eléctrico se calcula, en general, a partir de una expresión integral y se representa gráficamente mediante líneas de campo.
- La **Ley de Gauss** es una ley fundamental de la física que puede utilizarse para calcular de una forma sencilla (sin integrar) el campo eléctrico creado por distribuciones de carga que posean un alto grado de simetría.