

8.- Las fuerzas de la Naturaleza.

§8.1. Las leyes de las fuerzas (187); §8.2. Las fuerzas fundamentales (188); §8.3. Fuerzas gravitatorias (190); §8.4. Fuerzas electromagnéticas (191); §8.5. Fuerzas nucleares (194); §8.6. Interacción débil (195); §8.7. Fuerzas moleculares (196); §8.8. Fuerzas de rozamiento (198); §8.9. Rozamiento. Estudio experimental (199); §8.10. Ángulos de rozamiento (202); §8.11. Rozamiento. Estudio microscópico (203); §8.12. Fuerzas de rozamiento en los fluidos (205); §8.13. Fuerzas de ligadura (206); §8.14. Fuerzas de inercia (209); §8.15. Estática de la partícula. Principio de D'Alembert (214); Problemas (216)

§8.1. Las leyes de las fuerzas.- Las tres leyes del movimiento que hemos estudiado en las dos lecciones precedentes no resuelven por sí solas el problema central de la Mecánica Clásica de las partículas; esto es, dada una partícula cuyas características físicas (masa, carga eléctrica, ...) conocemos, colocada en un cierto ambiente del que tenemos una descripción completa, ¿cuál será el movimiento subsiguiente de la partícula?

De acuerdo con el método de trabajo que nos propusimos seguir, ya hemos definido el *concepto de fuerza* (en función de la aceleración que adquiere un cierto cuerpo patrón) y el *concepto de masa* (estableciendo un procedimiento que nos permite asignar una masa a cada cuerpo). Sólo nos falta investigar las *leyes de las fuerzas*, esto es, los procedimientos que nos permitan calcular la fuerza que actúa sobre la partícula a partir de las propiedades de la misma y de su medio ambiente. Entonces completaremos nuestro programa y podremos dar por resuelto el problema.

No debemos considerar la segunda ley del movimiento

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad [8.1]$$

como una ley de la Naturaleza, sino más bien como una definición de fuerza. Está claro que podemos utilizar la segunda ley de Newton para medir la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la partícula de masa m , a través de una medida de su aceleración \mathbf{a} . Pero el concepto de fuerza juega un papel central en la Física y la ec. [8.1] debe interpretarse más bien del siguiente modo: conocida la fuerza, la ec. [8.1] nos determina la aceleración, o sea el movimiento de la partícula. Por consiguiente, el papel del físico es descubrir cuáles son las fuerzas que existen en la Naturaleza ya que, una vez conocidas, el problema se reducirá a buscar la solución de la ec. [8.1],

que es una ecuación diferencial de segundo orden. Así pues, necesitamos identificar diversas funciones del tipo

[8.2]

F = una función de las propiedades de la partícula
y de las de su entorno.

de modo que podamos, en cada caso, eliminar F entre las ecuaciones [8.1] y [8.2], para obtener así una ecuación que nos permita calcular la aceleración de la partícula en función de sus propiedades y de las de su medio ambiente. Como vemos, el concepto de fuerza aparece tanto en las *leyes del movimiento* [8.1] (que nos dicen qué aceleración experimentará una partícula bajo la acción de una fuerza dada), como en las *leyes de las fuerzas* [8.2] (que nos permiten calcular la fuerza que actuará sobre la partícula al colocarla en un medio ambiente determinado).

La cantidad y variedad de medios ambientes posibles para una partícula es tan grande que nos resultaría imposible realizar un estudio detallado de todas las leyes de las fuerzas. En esta lección haremos una breve exposición de algunas características de las interacciones fundamentales, que estudiaremos con más detalle y profundidad en los capítulos específicos que desarrollaremos a lo largo de este libro. También daremos algunas descripciones empíricas de las fuerzas macroscópicas, no fundamentales, más comunes en el ámbito de la Mecánica Clásica.

§8.2. Las fuerzas fundamentales.- En nuestra experiencia cotidiana encontramos una gran variedad de fuerzas, que relacionamos con diversos agentes. Así hablamos de la fuerza muscular que ejercemos al empujar un armario sobre el piso, de la fuerza de rozamiento que el piso hace sobre aquél, de la fuerza elástica en un muelle estirado, de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre la Luna, de la fuerza de origen eléctrico que pone en marcha el motor de un automóvil, de la fuerza hidráulica que acciona los frenos del mismo o de la fuerza mecánica que lo detiene si tiene la desgracia de colisionar contra una farola.

Con independencia del número de nombres que damos a las fuerzas que usamos o que simplemente conocemos, existen solamente dos *fuerzas fundamentales* que gobiernan el comportamiento de los cuerpos que encontramos en nuestra experiencia diaria. Estas dos fuerzas son las *gravitatorias* y las *electromagnéticas*. Todas las otras fuerzas, aparentemente diferentes, pueden considerarse como diferentes manifestaciones macroscópicas de esas fuerzas fundamentales. Así, las llamadas *fuerzas de contacto* entre dos cuerpos son realmente, en último análisis, de carácter electromagnético (principalmente electrostático) y representan la suma total de un número enorme de interacciones entre moléculas muy próximas entre sí. Las fuerzas de *fricción viscosa* que experimenta un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido tienen también su origen en las fuerzas electromagnéticas a nivel molecular entre las numerosas moléculas del cuerpo y del fluido.

Normalmente resultará difícil (por no decir imposible) y poco práctico obtener la ley a la que obedece una fuerza macroscópica en función de las fuerzas gravitatorias y electromagnéticas (principalmente estas últimas) entre partículas submicroscópicas (moléculas, átomos, partículas elementales). Por lo tanto, las

expresiones de dichas leyes de fuerza habrá que suponerlas (como hipótesis de trabajo) y obtenerlas experimentalmente.

Como ejemplos, un bloque que se desliza sobre un tablero experimenta una fuerza de rozamiento que es aproximadamente proporcional a la fuerza normal que hace el bloque contra el tablero; una esferilla que cae en un fluido viscoso está sometida a una fuerza viscosa que se opone a su movimiento y que es aproximadamente proporcional a su velocidad; la fuerza que ejerce un muelle estirado es aproximadamente proporcional a su deformación. Todas estas leyes de las fuerzas son leyes *empíricas* y, como vemos, *aproximadas*; *i.e.*, no son leyes fundamentales de la Naturaleza.

Sin embargo, las dos fuerzas fundamentales anteriormente mencionadas, las gravitatorias y las electromagnéticas, no son suficientes para describir todos los fenómenos de la Física. El estudio de los fenómenos a escala nuclear y de partículas elementales pone de manifiesto la existencia de otras dos fuerzas fundamentales: la asociada a la denominada *interacción fuerte*, que mantiene juntos los nucleones (protones y neutrones) del núcleo atómico y la asociada a la llamada *interacción débil*, que existe entre las partículas elementales.

Las fuerzas gravitatorias y las electromagnéticas son fuerzas de *largo alcance*; esto es, son efectivas a largas distancias y, por eso mismo, son responsables de los fenómenos a gran escala. Las fuerzas nucleares y las de interacción débil son fuerzas de *corto alcance* de modo que sus efectos sólo resultan evidentes a la escala nuclear. Sin embargo estas fuerzas desempeñan un papel crucial en nuestra existencia. La vida en la Tierra es posible gracias a la energía que, en forma de radiación luminosa, recibimos del Sol, energía que en último análisis procede de los procesos nucleares que tiene lugar en el Sol.

Resumiendo, todas las fuerzas distintas observadas en la Naturaleza pueden explicarse hoy día en función de cuatro interacciones fundamentales o básicas que ocurren entre las partículas elementales:

- (1) *Fuerzas gravitatorias.*
- (2) *Fuerzas electromagnéticas.*
- (3) *Fuerzas de la interacción fuerte.*
- (4) *Fuerzas de la interacción débil.*

y parece ser que no hay necesidad de ninguna otra fuerza fundamental adicional para explicar todos los fenómenos conocidos hoy día. Es imposible, en el estado actual de la Física, decir porque existen estas fuerzas y nos contentamos con escribir los movimientos en función de ellas.

Por otra parte, es posible que las interacciones fundamentales no sean completamente independientes, pero la relación existente entre ellas no ha sido establecida aún de una forma satisfactoria. Experimentos recientes con partículas elementales en el dominio de muy altas energías parecen indicar una conexión entre la interacción electromagnética y la interacción débil. Quizás, con el tiempo, seamos capaces de basar nuestra descripción de toda la Naturaleza en sólo una o dos interacciones fundamentales, pero de momento tenemos que basarla en las cuatro interacciones básicas descritas.

§8.3. Fuerzas gravitatorias.- La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos es un fenómeno universal: todas las partículas ejercen entre sí una fuerza gravitatoria de atracción. La ley de gravitación universal fue descubierta por Newton y publicada en 1686. Esta ley puede enunciarse así:

Toda partícula material del Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas de ambas partículas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y dirigida según la recta que las une.

Esto es, la fuerza \mathbf{F}_{21} con que una partícula de masa m_1 atrae a otra partícula de masa m_2 viene dada por

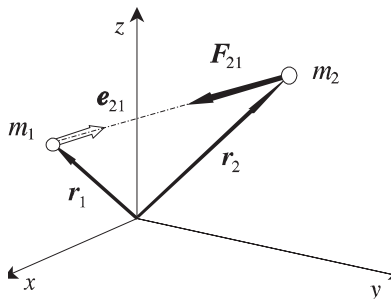


Figura 8.1

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{21} \quad [8.3]$$

donde $\mathbf{r}_{21} = r_{21} \mathbf{e}_{21}$ es el vector de posición de la partícula 2 respecto a la 1, \mathbf{e}_{21} es el vector dirigido de la partícula 1 a la 2 (Figura 8.1) y G es una constante universal, denominada *constante de Gravitación Universal*, cuyo valor, determinado experimentalmente, es

$$G = 6.6720 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad [8.4]$$

El signo negativo en la ec. [8.3] indica que la fuerza gravitatoria está dirigida hacia m_1 , o sea que es una fuerza de atracción. La expr. [8.3] puede aplicarse para calcular la fuerza que m_2 ejerce sobre m_1 (basta intercambiar todos los subíndices 1 y 2). La fuerza \mathbf{F}_{12} , así obtenida, tiene el mismo módulo y dirección de la fuerza \mathbf{F}_{21} , pero su sentido es opuesto al de ésta, ya que el versor \mathbf{e}_{12} es opuesto al versor \mathbf{e}_{21} . Así, en principio, la ley de gravitación de Newton cumple los requisitos de la ley acción-reacción.

La proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia que aparece en la ley de la gravitación universal ya fue sospechada por HOOKE (1635-1703) y otros científicos contemporáneos de Newton. Pero fue Newton¹ quien consiguió deducir la ley de la gravitación universal a partir de las leyes de KEPLER (1571-1630) y de sus propias leyes del movimiento.

La ley de gravitación de Newton se refiere a la fuerza entre dos partículas. ¿Cómo puede aplicarse para calcular la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos de un cierto tamaño?. Evidentemente, el procedimiento a seguir será aplicar la ec. [8.3] entre todas las parejas de partículas que podamos formar tomando una partícula de cada cuerpo y sumando los resultados parciales obtenidos (Figura 8.2). Esta operación exige

¹ Parece existir alguna evidencia de que Newton llegase a la deducción de esta ley a partir de sus reflexiones sobre la caída de una manzana, pero los primeros cálculos para justificar su exactitud se referían al movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.

recurrir al cálculo integral y, aunque no es difícil, la pospondremos para cuando estudiemos con más profundidad, en una lección posterior, la ley de gravitación. Por ahora nos conformaremos con aceptar la hipótesis formulada por Newton (que demostró posteriormente tras inventar el cálculo diferencial e integral²) de que la fuerza gravitatoria ejercida por o sobre una esfera homogénea es la misma que se tendría si toda la masa de la esfera estuviera concentrada en su centro. De acuerdo con este enunciado no tendremos ninguna dificultad para calcular la fuerza gravitatoria entre un pequeño cuerpo y la Tierra, o entre ésta y la Luna.

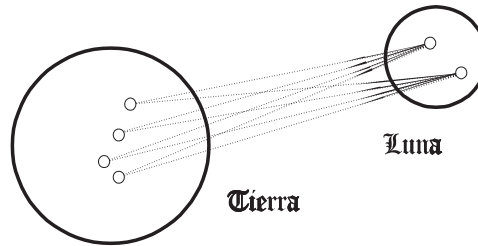


Figura 8.2

Al ser tan pequeño el valor de la constante de gravitación universal, G , la atracción gravitatoria sólo puede apreciarse entre cuerpos de gran masa o si se toman precauciones extremas para evitar cualquier otra perturbación que pueda actuar sobre los cuerpos.

A modo de ejemplo calcularemos la magnitud de la fuerza gravitatoria existente entre dos bolas de plomo de 1 kg de masa cada una, cuando sus centros están separados 10 cm. Tratando las bolas como si la masa de cada una de ellas estuviese concentrada en su centro, obtendremos una fuerza extraordinariamente pequeña:

$$F = 6.672 \times 10^{-11} \frac{1 \cdot 1}{0.1^2} = 6.672 \times 10^{-9} \text{ N} \approx 10 \mu\text{g} \quad [8.5]$$

En cambio, si repetimos el cálculo para la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna encontraremos una fuerza muy grande:

$$F = 6.672 \times 10^{-11} \frac{7.35 \cdot 10^{22} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(3.84 \times 10^8)^2} \approx 2 \times 10^{20} \text{ N} \quad [8.6]$$

§8.4. Fuerzas electromagnéticas.- Las fuerzas ejercidas entre dos partículas a causa de su carga eléctrica se denominan *fuerzas electromagnéticas*. La descripción de estas fuerzas es considerablemente más complicada que la correspondiente a las fuerzas gravitatorias.

Por una parte, la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas en reposo, la llamada *fuerza electrostática*, puede ser atractiva o repulsiva, en tanto que la fuerza gravitatoria es siempre atractiva.

Una complicación aún mayor surge cuando las partículas se encuentran en movimiento, pues entonces a la fuerza electrostática se superpone la llamada *fuerza magnética*, que es función de las velocidades de las partículas cargadas interactuantes y que generalmente no actúa según la recta que une ambas partículas. Normalmente utilizaremos el término de *fuerza electromagnética* para indicar que los dos efectos,

² En realidad, Newton ideó el *Cálculo de Fluxiones*, antecedente del actual Cálculo Diferencial e Integral.

el electrostático y el magnético, están presentes. Sin embargo es importante comprender que las fuerzas magnéticas no tienen existencia independiente de las cargas eléctricas; estas fuerzas aparecen exclusivamente entre cargas eléctricas en movimiento. Por esa razón, usaremos el término de *fuerza eléctrica* en un sentido general para indicar la fuerza electrostática pero incluyendo la posibilidad de la fuerza magnética, si las cargas están en movimiento.

Ahora, en nuestra breve descripción de las fuerzas fundamentales, comenzaremos considerando la fuerza electrostática; esto es, la fuerza que actúa entre cargas eléctricas en reposo. La ley de la fuerza electrostática fue descubierta por el físico francés Charles A. COULOMB (1736-1806) en 1795 y establece que

Entre dos partículas cargadas existe una fuerza atractiva o repulsiva que es proporcional al producto de las cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y dirigida según la recta que las une.

Esto es, de acuerdo con la notación utilizada en el artículo anterior, la fuerza electrostática entre dos partículas cargadas, en el vacío, viene expresada por

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{21} \quad [8.7]$$

en donde k es una constante, llamada *constante de Coulomb*, cuyo valor depende del sistema de unidades elegido. En el Sistema Internacional de Unidades Físicas (SI), la constante de Coulomb (que por razones históricas se acostumbra escribir $1/4\pi\epsilon_0$) tiene el valor

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \quad [8.8]$$

o sea
$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \quad [8.9]$$

siendo ϵ_0 la llamada *permitividad del vacío*. Así, la ley de Coulomb la escribiremos

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{21} \quad [8.10]$$

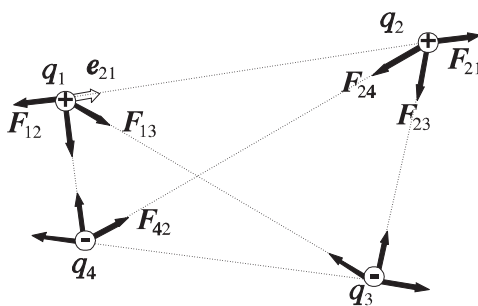


Figura 8.3

Existen dos clases de carga eléctrica. Las cargas de una misma clase se repelen entre sí; las cargas de distinta clase se atraen mutuamente. Siguiendo la sugerencia de Benjamín FRANKLIN (1706-90), y de modo arbitrario, se le asignó el signo positivo a las de una clase y el negativo a las de la otra. En la ec. [8.10] viene incluido el hecho de que las cargas del mismo signo se repelen y las de distinto signo se atraen.

Una importante propiedad de la carga eléctrica es que está cuantizada; esto es, la carga eléctrica siempre tiene la magnitud Ne , en donde N es un número entero y e una unidad fundamental de carga igual a la magnitud de la carga eléctrica de un electrón o de un protón. Todas las partículas elementales conocidas poseen una carga $+e$, $-e$ o nula. La unidad fundamental de carga, en unidades del sistema SI (mks), o sea en coulombs (C) es

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad [8.11]$$

Las fuerzas coulombianas se superponen a las fuerzas gravitatorias, que están siempre presentes. Como ambas fuerzas, la electrostática y la gravitatoria, varían en razón inversa al cuadrado de la distancia entre las partículas, la relación entre ellas es independiente de la separación entre las partículas. Podemos así comparar las intensidades relativas de estas dos fuerzas entre partículas elementales, tales como dos protones o dos electrones. La masa del protón es $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y su carga es $+e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, de modo que la relación entre la fuerza electrostática F_e y la gravitatoria F_g para dos protones a cualquier separación es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k}{G} \frac{e^2}{m_p^2} \approx 10^{36} \quad [8.12]$$

Como los electrones poseen una masa que es $m_e \approx m_p/1836$, la relación F_e/F_g para dos electrones es aún mayor ($\approx 4 \times 10^{42}$).

Así pues, la fuerza gravitatoria entre dos partículas elementales es tan pequeña frente a la fuerza electrostática que puede despreciarse al describir la interacción. Por lo tanto, sólo la fuerza electrostática es importante en la descripción de los sistemas atómicos. En el núcleo atómico, la fuerza nuclear es aún más potente que la fuerza electrostática entre los protones que lo constituyen, pero no tanto como para que ésta sea siempre despreciable. Muchos fenómenos importantes a nivel del núcleo atómico son consecuencia de las fuerzas electrostáticas.

Cuando las cargas eléctricas están en movimiento, a las fuerzas electrostáticas se superponen otras, las *fuerzas magnéticas*, que dependen de las velocidades de las partículas y que generalmente no actúan según la recta que une las partículas interactuantes, por ser fuerzas deflectoras; esto es, que tienen siempre una dirección normal a la velocidad de la partícula cargada sobre la que actúan. No vamos ahora a entrar en más detalles acerca de esta fuerza, ni tan siquiera nos va a preocupar la expresión correcta de la ley de fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales que se mueven de modo arbitrario, la una con respecto a la otra, puesto que resulta demasiado complicado para hacerlo sin entrar más a fondo en el tema. Nos conformaremos con escribir la llamada *fórmula de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad [8.13]$$

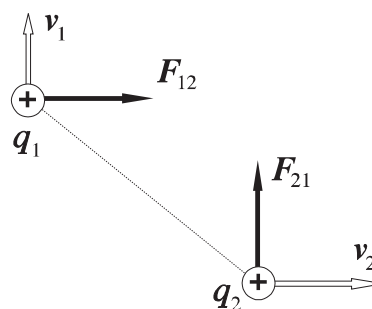


Figura 8.4

que nos permite calcular la fuerza electromagnética que actúa sobre una carga q que se mueve con una velocidad \mathbf{v} en un campo electromagnético definido por la intensidad eléctrica \mathbf{E} y la inducción magnética \mathbf{B} .

§8.5. Fuerzas nucleares.- Las dos interacciones que acabamos de describir, la gravitatoria y la electromagnética, son las únicas que necesitamos tener en cuenta para explicar el movimiento de los objetos cotidianos y aun para explicar el comportamiento de los sistemas atómicos. Sin embargo, cuando profundizamos dentro del átomo e indagamos acerca de la naturaleza de las fuerzas que actúan entre los componentes de su núcleo, encontramos que las fuerzas gravitatorias y electromagnéticas no son ya apropiadas para describir los fenómenos que observamos.

Como ya sabemos, el núcleo atómico es extraordinariamente pequeño, siendo su radio del orden de 10^{-15} m (1 fm) y está compuesto por *protones* (p), partículas elementales con carga positiva, y *neutrones* (n), que no tienen carga eléctrica. Entre los protones que constituyen el núcleo atómico existe una fuerza coulombiana repulsiva muy fuerte que no puede ser compensada por la fuerza gravitatoria (atractiva) entre los componentes del núcleo (los *nucleones*) pues, como hemos visto anteriormente, la magnitud de ésta es despreciable frente a la de aquélla. Como observamos que un gran número de núcleos son estables, es obvio que debe existir una fuerza atractiva extraordinariamente fuerte que actúe en el interior del núcleo y compense a la fuerza de repulsión coulombiana que tiende a romperlo.

A modo de ejemplo numérico, calculemos aproximadamente la magnitud de la fuerza electrostática entre dos protones en un núcleo típico. Así, consideramos el núcleo de helio (${}^4\text{He}$) que está constituido por dos protones y dos neutrones, contenidos en un volumen de un radio de 2×10^{-15} m, aproximadamente. A esa distancia, la fuerza electrostática entre los protones es

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(2 \times 10^{-15})^2} \approx 58 \text{ N} \approx 6 \text{ kg} \quad [8.14]$$

que es una fuerza repulsiva enorme. Sin embargo, el núcleo ${}^4\text{He}$ es muy estable.

El resultado anterior nos indica que debe existir una fuerza atractiva extraordinariamente fuerte entre los componentes del núcleo. Esta fuerza es la que denominamos *fuerza nuclear*, también llamada fuerza de *interacción fuerte* para distinguirla de la fuerza de *interacción débil* que actúa entre todas las partículas elementales.

La fuerza nuclear actúa entre dos protones (p-p), entre dos neutrones (n-n) y entre un protón y un neutrón (p-n), pero sólo si las partículas están muy próximas. Esto es, la fuerza nuclear es de *corto alcance*. Hoy sabemos que las fuerzas p-n y n-n son esencialmente idénticas y que, aparte la porción coulombiana, la fuerza p-p es la misma que la n-n o la p-n. Puesto que los protones y los neutrones tienen muchas propiedades comunes (excepto, principalmente, la carencia de carga eléctrica en el neutrón), estas partículas reciben el nombre genérico de *nucleones*. En lo que sigue hablaremos de fuerzas nucleón-nucleón, incluyendo así de una vez las tres posibles combinaciones.

Cuando la distancia entre dos nucleones es del orden de 1 fm (fermi) la fuerza nuclear entre ellos es atractiva y unas 100 veces más intensa que la fuerza eléctrica repulsiva que existe entre dos protones a esa misma distancia. Pero la fuerza nuclear es de corto alcance, siendo su radio de acción como mucho del orden del radio nu-

clear, de modo que fuera de ese alcance deja de existir bruscamente.

La fuerza nuclear no es enteramente atractiva, ya que para distancias muy pequeñas es repulsiva; de ese modo se evita que el núcleo atómico se colapse. En la Figura 8.5 se representa esquemáticamente la variación de la fuerza nuclear entre dos nucleones en función de la distancia que los separa.

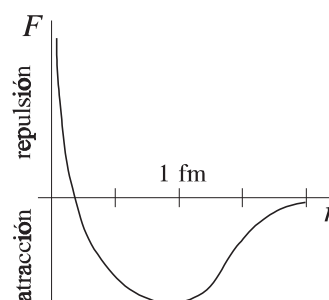


Figura 8.5

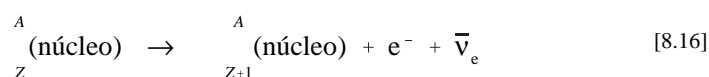
En el momento presente no existe una ley de fuerza para las fuerzas nucleares. Es más, en la Física Nuclear no pensamos en términos de *fuerza* al describir la interacción entre dos nucleones sino que encontramos preferible utilizar el concepto de *energía de interacción*. Cualquier fórmula que escribamos en términos de las fuerzas no será más que una grosera aproximación que omitirá muchas complicaciones. Así ocurre cuando decimos que las fuerzas nucleares no decrecen simplemente con el cuadrado de la distancia, sino que incluyen un factor de decrecimiento exponencial con la distancia, de forma que escribimos

$$F = - \frac{K}{r^2} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad (\text{para } r > r_0) \quad [8.15]$$

donde $r_0 \approx 10^{-15}$ m y, además, cuando $r \gg r_0$ la fuerza nuclear desaparece. La ec. [8.15] corresponde a la fuerza nuclear derivada del *potencial de YUKAWA*. En nuestro estado actual de conocimientos, la ley de la fuerza nuclear resulta muy compleja y no podemos entenderla por un camino simple. Al tratar con partículas tan pequeñas y tan cortas distancias, las leyes de la Mecánica Newtoniana pierden validez y deben ser sustituidas por las de la Mecánica Cuántica. El problema total de analizar el mecanismo íntimo que conduce a la aparición de las fuerzas nucleares está aún por resolver.

Para terminar nuestra breve y elemental exposición sobre las fuerzas nucleares diremos que este tipo de interacción no es exclusivo de los nucleones (protones y neutrones) sino que existe una amplia variedad de partículas elementales, llamadas *hadrones* que interactúan por medio de la *fuerza nuclear fuerte*. Los hadrones incluyen los *mesones* de muchos tipos (*piones*, *kaones*, ...) y los *bariones*, que a su vez incluyen a los nucleones y a otras partículas pesadas. En cambio, otras partículas elementales más ligeras no participan de este tipo de interacción; son los *leptones*, que incluyen los *electrones*, *positrones*, *muones* y *neutrinos*.

§8.6. Interacción débil.- En el proceso radioactivo de desintegración β de un núcleo, el núcleo padre emite un electrón y un neutrino; podemos expresar ese proceso por



lo que equivale a considerar que un neutrón del núcleo padre ha experimentado una *desintegración β* ,



de modo que se obtiene un núcleo hijo con un protón más y un neutrón menos que el padre (isóbaro).

Del mismo modo que dos hadrones (dos nucleones por ejemplo) interactúan fundamentalmente a través de la *fuerza de la interacción fuerte*, el electrón y el neutrino lo hacen (exclusivamente) por la *fuerza de interacción débil*. Esta *fuerza débil* es la responsable de la desintegración β .

Se había pensado que la interacción débil no aparecería más que con la presencia de neutrinos y otros leptones, pero también parece dirigir las desintegraciones lentas de las llamadas *partículas raras* aun cuando no se detecte ningún leptón. La interacción débil existe entre todo par de partículas elementales, por lo que también se la denomina *interacción universal de Fermi*. La interacción débil es la única que existe entre los electrones y los neutrinos, pero también existe entre los nucleones, aunque es mucho más débil que la interacción fuerte y la interacción electromagnética. La relación entre la fuerza débil y la fuerza nuclear es $1:10^{13}$, lo que nos permite despreciar las "fuerzas débiles" cuando están en juego las nucleares.

Para terminar, y a modo de resumen, en la Tabla 8.1 presentamos las magnitudes relativas de las cuatro fuerzas fundamentales que actúan entre diversos pares de partículas elementales, para pequeñas distancias del orden de 10^{-15} m. Arbitrariamente, hemos asignado la magnitud unidad a las fuerzas nucleares.

§8.7. Fuerzas moleculares.- Las fuerzas que actúan entre las moléculas reciben el nombre de *fuerzas moleculares*. Estas fuerzas no tienen carácter fundamental, en el sentido en que lo son las cuatro fuerzas básicas estudiadas anteriormente, ya que son manifestaciones complejas de la interacción electromagnética básica entre los electrones y núcleos de una molécula con los de otra. Las fuerzas moleculares no han podido ser explicadas dentro del formulismo de la

Tabla 8.1.- Magnitudes relativas de las cuatro interacciones fundamentales. Hemos asignado la magnitud unidad a la fuerza nuclear.

Tipo de interacción	p-p	p-n, n-n	e-p	e-v
nuclear	1	1	0	0
electromagnética	10^{-2}	0	10^{-2}	0
débil	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
gravitatoria	10^{-38}	10^{-38}	10^{-41}	0

Mecánica Clásica; sus detalles sólo pueden comprenderse dentro de la estructura de la Mecánica Cuántica. Sin embargo, podemos encontrar descripciones empíricas satisfactorias que nos pueden ser muy útiles en la comprensión de las fuerzas moleculares. Se nos presentan diferentes casos.

Así, por ejemplo, en una molécula de agua (H_2O), la carga negativa está más ligada al átomo de oxígeno que a los átomos de hidrógeno, de modo que la posición media de las cargas eléctricas negativas y de las positivas no coinciden en un mismo punto. Las moléculas que tiene esta propiedad se llaman *moléculas polares* y están caracterizadas por su *momento dipolar*, que se define como el producto de la carga por la distancia entre sus centros. En el caso de las moléculas polares, la fuerza molecular es relativamente intensa.

En otros casos, como en el de la molécula de oxígeno (O_2) que es muy simétrica, la carga eléctrica está más distribuida, de modo que coinciden en un mismo punto las posiciones medias de las cargas positivas y negativas. Estas son las llamadas *moléculas no-polares* y para ellas las fuerzas intermoleculares son menos intensas. Para las moléculas no-polares cabría esperar que todas las fuerzas eléctricas se neutralizasen; sin embargo es un hecho bien comprobado la existencia de una fuerza atractiva para distancias grandes en comparación con el tamaño de la molécula. Esa fuerza, en primera aproximación, varía en razón inversa a la séptima potencia de la distancia, esto es

$$F = -\frac{k}{r^7} \quad [8.18]$$

donde k es una constante para cada especie molecular. La ec. [8.18] corresponde a la llamada *fuerza de Van der WAALS* y para comprenderla se debe recurrir a los métodos mecano-cuánticos. Cuando las moléculas son polares la atracción es más fuerte.

Además, las fuerzas moleculares, al igual que vimos que ocurre con las fuerzas nucleares, no son estrictamente atractivas, sino que para pequeñas distancias son fuerzas repulsivas que tienden a alejar las moléculas. Estas fuerzas repulsivas son las que nos permiten estar sobre el suelo sin que pasemos a través de él. En la Figura 8.6 representamos la variación de la magnitud de la fuerza molecular entre dos moléculas en función de la distancia que las separa.

Así pues, las fuerzas moleculares son atractivas a gran distancia (relativa al tamaño de la molécula) y repulsivas cuando las moléculas están muy próximas. Para una cierta distancia r_0 la fuerza molecular es nula, lo que significa que todas las complejas interacciones electromagnéticas se compensan, de modo que a esa distancia el sistema formado por las dos moléculas se encuentra en equilibrio. Si a partir de esa posición tratásemos de aproximarlas, aunque solo fuera ligeramente, enseguida aparecerían las fuerzas repulsivas que se oponen a esa aproximación: se requeriría una fuerza externa extraordinariamente grande para aproximar las moléculas más allá de su posición de equilibrio pues, como muestra la gráfica de la Figura 8.6, la fuerza repulsiva aumenta rápidamente para distancias inferiores a r_0 . Por otra parte, si

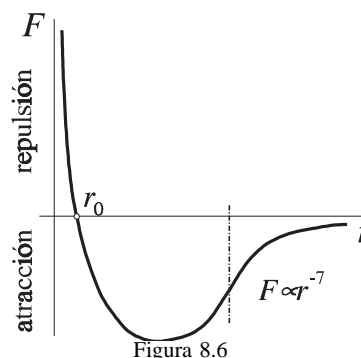


Figura 8.6

tratásemos de separarlas ligeramente, aparecería una fuerza atractiva que aumentaría en intensidad conforme creciese la separación entre las moléculas; pero si la fuerza externa fuese suficientemente intensa, entonces podríamos separarlas definitivamente, esto es, romperíamos el enlace.

La gráfica de la Figura 8.6 nos muestra también que para pequeños desplazamientos con respecto a la posición de equilibrio r_0 , la fuerza molecular (atractiva o repulsiva) es proporcional al desplazamiento. Este resultado es conocido como *ley de Hooke* o ley de la elasticidad, aplicable en muy diversas situaciones, y nos dice que cuando un cuerpo o un sistema experimenta una deformación aparece una fuerza restauradora que trata de devolverlo a las condiciones originales, y que dicha fuerza es proporcional a la magnitud de la deformación. La ley de Hooke puede escribirse en la forma

$$F = -k(r - r_0) = -k \Delta r \quad [8.19]$$

donde Δr es la magnitud de la deformación y el signo negativo indica que la fuerza es recuperadora. La constante k que aparece en la ec. [8.19] depende de la naturaleza del sistema y debe determinarse experimentalmente. La ley de Hooke sólo es válida para deformaciones relativamente pequeña; si la deformación es relativamente grande no existirá una relación lineal entre ésta y la fuerza recuperadora; y si es aún más grande puede que ni tan siquiera exista fuerza recuperadora y que el sistema mantenga permanentemente la deformación o que se rompa.

Para terminar esta exposición de carácter general sobre las fuerzas moleculares diremos que éstas son responsables de un gran número de fenómenos que se presentan a escala macroscópica. Así, las llamadas *fuerzas de contacto* son, en último análisis, fuerzas entre moléculas. También es ese el caso de las *fuerzas de cohesión* que actúan entre las moléculas de una misma especie, de las *fuerzas de adhesión* que actúan entre moléculas de distinta especie (entre líquido y sólido, por ejemplo), de las *fuerzas de tensión superficial* en los líquidos, que junto con las anteriores dan lugar a los fenómenos de capilaridad, de las *fuerzas de rozamiento* entre sólidos y de las *fuerzas de viscosidad* que se oponen al movimiento interno de los fluidos reales y al movimiento de los sólidos en el seno de aquéllos, de las *fuerzas elásticas* que aparecen en los muelles extendidos o comprimidos o en cualquier cuerpo real sometido a tensión o compresión, etc ... Todas ellas son manifestaciones de las fuerzas intermoleculares y, en último término, de la interacción electromagnética básica.

§8.8. Fuerzas de rozamiento.- Las fuerzas de rozamiento están clasificadas entre aquellas *fuerzas pasivas* que tratan de impedir o retardar el movimiento, independientemente de la dirección en que dicho movimiento tenga lugar o tienda a tenerlo. Si lanzamos un bloque, de masa m , a lo largo del tablero horizontal de una mesa, con una velocidad inicial v_0 , la experiencia nos enseña que su velocidad no permanece constante, sino que disminuye gradualmente hasta que el bloque se detiene; esto es, el bloque experimenta una cierta aceleración a en sentido opuesto al de su movimiento. Si en un referencial inercial observamos que un cuerpo está acelerado debemos pensar que sobre él está actuando una fuerza resultante en la misma dirección y sentido que la aceleración. Evidentemente, sobre el bloque de

nuestro experimento están actuando dos fuerzas en la dirección vertical: el peso P del bloque y la reacción normal N del tablero sobre el bloque. Esas dos fuerzas deben equilibrarse ya que no se observa aceleración alguna en la dirección vertical. Como existe una aceleración en la dirección horizontal y en sentido opuesto al del movimiento declararemos que sobre el bloque está actuando una *fuerza de rozamiento*, ejercida por el tablero, cuyo valor es ma .

En realidad, siempre que la superficie de un cuerpo desliza sobre la de otro aparecen las fuerzas de rozamiento, que son paralelas a las superficies y obran sobre cada uno de los cuerpos en tal sentido que *se oponen al movimiento relativo*. Las fuerzas de rozamiento siempre se oponen al movimiento y nunca lo ayudan. Aunque no haya movimiento relativo

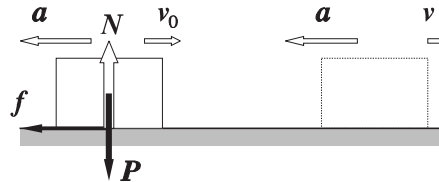


Figura 8.7

puede haber rozamiento entre las superficies: basta con que haya una tendencia al movimiento como consecuencia de la acción de otras fuerzas que actúen sobre los cuerpos en contacto. En este último caso hablaremos de *rozamiento estático* en contraposición al *rozamiento cinético* que se presenta cuando hay movimiento relativo.

El rozamiento desempeña un papel muy importante en la vida diaria. En general, el rozamiento estático nos resulta útil y es difícil imaginar como sería la vida sin él. Sin el rozamiento estático no podríamos caminar como lo hacemos, no podríamos sostener un lápiz entre nuestros dedos y, si lo consiguiéramos, no podríamos escribir con él, no sería posible el transporte sobre ruedas (tal como lo conocemos) y ni siquiera sería posible fabricar cuerdas y tejidos ya que su resistencia y durabilidad depende del rozamiento entre sus fibras. También la acción de las bandas, poleas y transmisiones del movimiento en la maquinaria sería imposible sin el rozamiento estático. En contrapartida, el rozamiento cinético es por lo general un inconveniente. Al actuar sólo la fuerza de rozamiento se detendrá cualquier cuerpo que se encuentre en movimiento. Tendremos que consumir energía para mantener en movimiento uniforme un automóvil, un avión, un barco, ... o una máquina cualquiera. Además, el rozamiento cinético hace que se desgasten las partes móviles de las máquinas; en ingeniería se dedican muchas horas-hombre para reducirlo. En cambio, tenemos a favor del rozamiento cinético, entre otras pocas cosas, la acción del embrague de un automóvil (en la arrancada) y la de los frenos.

§8.9. Rozamiento. Estudio experimental.- Supongamos un bloque en reposo sobre un tablero horizontal, como se muestra en la Figura 8.8, y apliquémosle una fuerza horizontal cuya magnitud F podemos variar (*tribómetro*). Encontraremos que cuando la magnitud de la fuerza F es suficiente pequeña el bloque permanece en reposo sobre el tablero; la fuerza F está contrarrestada por una fuerza de rozamiento (estático), f_s , en la misma dirección pero en sentido opuesto al de la fuerza aplicada, ejercida por el tablero y que obra en la superficie de contacto. Conforme vamos aumentando la magnitud de la fuerza aplicada F nos iremos acercando a un valor límite para el cual el movimiento es inminente. Hasta alcanzarse ese valor límite, la fuerza de rozamiento estático irá creciendo de modo que en todo momento contrarreste exactamente a la fuerza aplicada F . En esa situación límite diremos que el tablero ejerce una fuerza de rozamiento estático máxima sobre el bloque. Cuando aumentemos, aunque sólo sea ligeramente, la intensidad de la fuerza aplicada por encima de ese valor límite, observaremos que el bloque se pone en movimiento, y que dicho

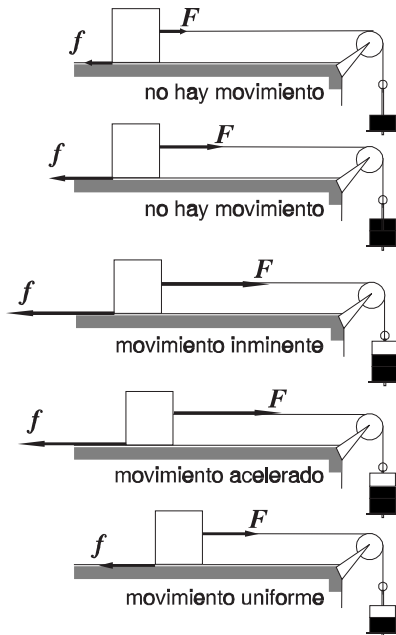


Figura 8.8

movimiento es acelerado. Se demuestra así que, una vez iniciado el movimiento, la fuerza de rozamiento disminuye; esto es, la fuerza de rozamiento cinético es menor que la de rozamiento estático máxima. Si después de iniciado el movimiento reducimos la intensidad de la fuerza F aplicada a un valor conveniente, encontraremos que es posible conservar el bloque en movimiento uniforme; esta fuerza puede ser pequeña pero no nula.

Quisiéramos ahora expresar las fuerzas de rozamiento en función de las propiedades del cuerpo (el bloque) y de su medio ambiente (el tablero); esto es, conocer la ley de fuerza para el rozamiento. Como veremos más adelante, al analizar el rozamiento a nivel microscópico, el rozamiento es un fenómeno extremadamente complejo, ya que representa a nivel macroscópico el valor promedio de un enorme número de interacciones que ocurre a nivel microscópico. No podemos, pues, esperar una ley de

fuerza para el rozamiento que tenga la elegante simplicidad y exactitud de la ley de gravitación universal o de la ley de la electrostática. Las leyes a que obedece la fuerza de rozamiento son leyes macroscópicas y empíricas que son sólo aproximadas en sus predicciones. Sin embargo, es notable que, considerando la gran variedad de superficies que encontramos, podamos entender muchos aspectos de la forma en que ocurre el rozamiento en base a un formulismo relativamente sencillo. En este artículo consideraremos únicamente el deslizamiento (no la rodadura) entre dos superficies secas (no lubricadas).

Los primeros antecedentes del estudio experimental del rozamiento se remontan a Leonardo da VINCI (1452-1519), quien encontró que la fuerza de rozamiento entre dos superficies es proporcional a la *carga* (fuerza normal entre las superficies) e independiente de la superficie de contacto. El enunciado de da Vinci relativo a estas dos leyes es notable, sobre todo si consideramos que se hizo dos siglos antes de que Newton desarrollarse por completo el concepto de fuerza. Estas leyes del rozamiento fueron redescubiertas por AMONTONS (1663-1705) en 1699 y comprobadas en 1781 en Charles A. COULOMB, que fue el primero en señalar la diferencia entre rozamiento estático y cinético. El trabajo de estos investigadores condujo a la formulación de las dos leyes para la fuerza de rozamiento estático entre superficies no lubricadas:

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático ...

- (1) ... es aproximadamente independiente del área (macroscópica) de contacto, dentro de unos límites muy amplios.
- (2) ... es proporcional a la *fuerza normal* de presión entre las superficies en contacto.

Esta *fuerza normal*³ es la que ejerce cualquier cuerpo sobre otro, perpendicularmente a la superficie de contacto mutuo, y proviene de la deformación elástica de los cuerpos que están en contacto.

La proporcionalidad entre el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático y la fuerza normal se establece a través del llamado *coeficiente de rozamiento estático*, que designaremos por μ_s , de modo que

$$f_s \leq \mu_s N \quad [8.20]$$

siendo válido el signo (=) sólo cuando f_s tiene su valor máximo; esto es, cuando el movimiento es inminente.

La fuerza de rozamiento cinético, f_k , entre superficies secas, obedece a las mismas dos leyes anteriores del rozamiento estático y, además, ...

(3) ... es independiente de la velocidad relativa de las superficies al menos si ésta es moderada.

(4) ... es, de ordinario, menor que la fuerza de rozamiento estático entre las mismas superficies.

El cociente entre la fuerza de rozamiento cinético y la magnitud de la fuerza normal es llamado *coeficiente de rozamiento cinético*, que designaremos por μ_k , de modo que

$$f_k = \mu_k N \quad [8.21]$$

Tanto μ_s como μ_k son constantes dimensionales, puesto que ambas son el cociente de las magnitudes de dos fuerzas. Obsérvese que las ec. [8.20] y [8.21] son relaciones entre las magnitudes de la fuerza normal y la de rozamiento; estas fuerzas son perpendiculares entre sí. Los valores de los coeficientes de rozamiento, estático y cinético, dependen principalmente de la naturaleza de las superficies y de su grado de pulimento. Ambos coeficientes pueden tener valores superiores a la unidad, si bien en los problemas más corrientes no será ese el caso, y además, de ordinario, es $\mu_s > \mu_k$. En la Tabla 8.2 mostramos algunos valores típicos de ambos coeficientes para varios materiales.

Aunque las llamadas leyes del rozamiento son útiles para el propósito de una orientación preliminar en este tema y para las aplicaciones técnicas, un poco de reflexión y de experimentación nos demostrará que no pueden aceptarse sin grandes reparos. Así, una observación cuidadosa demostraría que los coeficientes de rozamiento no pueden determinarse de modo exacto para dos superficies dadas, ya que los valores obtenidos variarían de un experimento al siguiente aun cuando las condiciones sean aparentemente las mismas, de modo que solamente podemos asignarles unos valores aproximados.

Como ejemplo de la variación del coeficiente de rozamiento para dos superficies dadas podemos considerar el caso del vidrio en contacto y resbalando sobre vidrio. Si las dos superficies son *planos ópticos* cuidadosamente preparados y si dichas superficies, previamente limpiadas, se ponen en contacto, pueden agarrarse entre sí de un modo tan intenso que se requiera un gran

³ Se trata de una *fuerza de ligadura*, como veremos en §8.13.

Tabla 8.2.- Valores de los coeficientes de rozamiento estático y cinético para varios materiales.

material	μ_s	μ_k	material	μ_s	μ_k
hielo - hielo 0°C	0.05 - 0.15	0.02	hierro-hierro	1.2	0.15
madera - madera	0.25 - 0.50	0.2 - 0.5	cobre-cobre	1.6 - 3	0.3
madera - metal	0.20 - 0.60	0.2 - 0.5	níquel-níquel	3.0	0.53
madera - ladrillo	0.30 - 0.40	0.2 - 0.3	caucho-sólido	1. - 4.	0.9 - 1.2
vidrio - metal	0.50 - 0.70	0.4 - 0.6	teflón-teflón	0.04	0.04
acero - acero	0.74 - 0.78	0.42 - 0.57			

esfuerzo para separarlas de nuevo. En estas condiciones la misma idea de coeficiente de rozamiento pierde todo significado. Incidentalmente, la propensión de las superficies a agarrarse aumenta con el tiempo de contacto y si queremos evitar un riesgo excesivo de agarrotamiento es conveniente que las hagamos deslizar o separarse antes de que sea demasiado tarde. En general, el coeficiente de rozamiento estático tiende a aumentar con el tiempo de contacto precedente. También, de ordinario, el coeficiente de rozamiento estático (para una misma carga) suele aumentar si las superficies en contacto han sido presionadas una contra otra con anterioridad.

La tercera ley del rozamiento dice que el coeficiente de rozamiento cinético es independiente de la velocidad, pero esto sólo es cierto entre unos límites bastantes estrechos. La comprobación experimental de esta ley exige una experimentación sumamente cuidadosa porque el rozamiento aparente entre dos superficies se reduce considerablemente si las superficies vibran muy rápidamente. Cuando el experimento se hace a muy altas velocidades debemos asegurarnos que el descenso que se observe en el valor del coeficiente de rozamiento no se deba precisamente a la existencia de esas vibraciones.

§8.10. Ángulos de rozamiento.- La superficie rugosa en contacto con el bloque B (Figura 8.9a) ejerce sobre éste dos fuerzas: la reacción normal N y la fuerza de rozamiento f . Aunque ambas fuerzas están distribuidas en toda el área de contacto, en la Figura 8.9 hemos representado las resultantes N y f de las mismas, aunque también podemos expresarlas en función de la resultante R y del *ángulo de rozamiento* θ definido por la dirección de R y la normal a la superficie de contacto. De la Figura 8.9a se sigue:

$$f = R \operatorname{sen} \theta \quad N = R \operatorname{cos} \theta \quad [8.22]$$

de modo que,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{f}{N} \quad [8.23]$$

El valor del ángulo θ cuando el movimiento es inminente se llama *ángulo de rozamiento estático* (θ_s); su valor cuando existe movimiento relativo entre las dos superficies se denomina *ángulo de rozamiento cinético* (θ_k). De las definiciones de

los coeficientes de rozamiento estático [8.20] y cinético [8.21] se siguen las relaciones existentes entre éstos y los respectivos ángulos de rozamiento:

$$\operatorname{tg}\theta_s = \mu_s \quad \operatorname{tg}\theta_k = \mu_k \quad [8.24]$$

Las denominaciones de *ángulos de rozamiento* proceden del siguiente hecho, que el lector comprobará fácilmente. En la Figura 8.9b, cuando vayamos aumentando gradualmente el ángulo de inclinación del plano sobre el que puede deslizarse el bloque B, el movimiento de éste será inminente cuando $\theta = \theta_s$. En el caso más frecuente, una vez iniciado el movimiento, éste será acelerado. Si deseamos que el bloque B descienda a velocidad constante, deberemos disminuir gradualmente el ángulo de inclinación del plano hasta que sea $\theta = \theta_k$ (*vide* Problema 8.5).

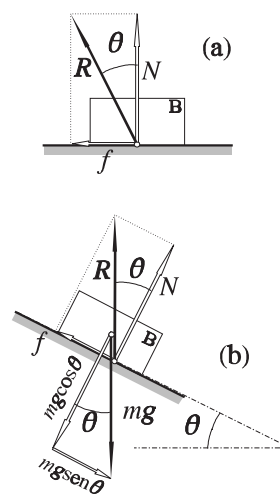


Figura 8.9

§8.11. Rozamiento. Estudio microscópico.-

A la escala molecular, incluso la superficie más finamente pulida está muy lejos de ser plana (Figura 8.10). Resulta fácil aceptar que, cuando colocamos dos cuerpos en contacto, el área real (microscópica) de contacto sea mucho menor que el área de contacto aparente (macroscópico). En algunos casos estas áreas pueden encontrarse en la proporción 1:10 000. Comprenderemos entonces que la presión en los contactos reales debe ser enorme. Las investigaciones realizadas por BOWDEN, en la década de los 40, han demostrado que dichas presiones son suficientes para hacer que hasta un duro metal como el acero fluya plásticamente. De ese modo, las crestas de las irregularidades en las superficies en contacto son aplastadas de manera que aumenta la superficie de contacto y la presión disminuye hasta que está justamente en el límite que causaría el fluir del metal. De hecho, muchos puntos de contacto quedan *soldados en frío* entre sí. Este fenómeno de *adherencia superficial* se debe a que, en los puntos de contacto, las moléculas en las caras opuestas de las superficies están tan próximas las unas a las otras que las fuerzas moleculares son extraordinariamente intensas.

Ya sea que dichas soldaduras localizadas ocurran o no, habrá siempre un considerable grado de trabazón entre las superficies reales, que, como ya hemos dicho, son rugosas a escala molecular. Cuando un cuerpo, como por ejemplo un metal, se arrastra sobre otro, la fuerza de rozamiento está relacionada con la ruptura de esos millares de pequeñas soldaduras, que continuamente se vuelven a formar en cuanto se presentan nuevas oportunidades de contacto. Experimentos realizados con rastreadores radiactivos han permitido

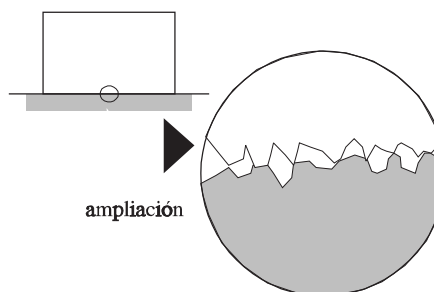


Figura 8.10

demostrar que durante el proceso de ruptura de las pequeñas soldaduras existe un intercambio de fragmentos de materia de una superficie a otra.

Asociado a la extrema pequeñez de las áreas de contacto, se presenta un calentamiento friccional localizado cuando ocurre el deslizamiento. Se ha obtenido evidencia de este calentamiento conectando dos metales diferentes, resbalando el uno sobre el otro, a un voltímetro de alta precisión y midiendo la fuerza electromotriz (f.e.m.) producida por efecto termoeléctrico. Estas medidas han puesto en evidencia que se alcanzan temperaturas considerablemente elevadas, hasta de 1 000°C y aún más, que incluso pueden producir una fusión local en algunas zonas de contacto, aun cuando la superficie en su conjunto pueda sentirse sólo ligeramente caliente.

El valor del coeficiente de rozamiento entre dos superficies depende de diversos factores, como son la naturaleza de los materiales, el acabado de las superficies, la presencia de películas superficiales, el grado de contaminación de las superficies, la temperatura, ...

Es un hecho notable que si intentamos medir el valor del coeficiente de rozamiento entre dos sustancias puras, tales como cobre sobre cobre, nos encontramos con resultados erróneos puesto que, normalmente, la superficies en contacto no serán de cobre puro sino que estarán contaminadas por óxidos y otras impurezas. Pero si intentásemos hacer nuestra medida para un contacto cobre-cobre puro, para lo cual deberíamos pulir y limpiar cuidadosamente las superficies a fin de eliminar cualquier película superficial de óxido o de grasa, e hiciéramos la experiencia en el vacío, para evitar la oxidación superficial del cobre y que quedase atrapada una película de aire entre las superficies, entonces encontraríamos con sorpresa que los dos cuerpos quedan soldados firmemente entre sí. La explicación de esta inesperada conducta es que cuando los átomos son todos de un mismo elemento no hay ningún procedimiento por el que puedan "saber" si pertenecen a una u otra pieza. Cuando existen otros tipos de átomos o moléculas (óxidos, grasas, ...) interpuestos entre las dos piezas en contacto, los átomos de cobre sí "saben" a que pieza pertenecen y el rozamiento se reduce a sus valores normales. El mismo fenómeno es fácilmente observable con láminas planas de vidrio convenientemente desengrasadas.

Con todas estas complicaciones no nos debe extrañar que no exista una teoría exacta del rozamiento en seco y que las leyes del mismo sean sólo empíricas y aproximadas. No es posible, dada su complejidad, establecerlas a partir de las fuerzas fundamentales, ni tan siquiera a partir de las fuerzas intermoleculares, pero la teoría microscópica del rozamiento (teoría de la adherencia superficial) ayuda a comprender las leyes enunciadas anteriormente.

A primera vista parecería lógico que la fuerza máxima de rozamiento estático (y lo mismo para el rozamiento cinético) fuese proporcional al área de contacto. Esto significaría que cuando arrastramos un ladrillo apoyado sobre una de sus caras más extensas el rozamiento debería ser mayor que cuando lo arrastramos sobre uno de sus bordes. Sin embargo, la primera ley del rozamiento, y la experiencia, nos dice que no es así, y que la fuerza de rozamiento es independiente, con buena aproximación, del área de contacto. Pero el área de contacto a la que se refiere esa ley es el *área de contacto macroscópica* (aparente) que es mucho mayor que el área de contacto microscópica (real). En realidad, *la fuerza de rozamiento es proporcional al área de contacto real* (microscópica), como parece lógico; pero esta área es proporcional al área macroscópica y a la presión que se ejercen entre sí las superficies.

Cuando el ladrillo de nuestro ejemplo se apoya sobre una de sus caras extensas existen un número grande de superficies de contacto microscópicas relativamente pequeñas; cuando el ladrillo se apoya sobre uno de sus bordes el número de superficies de contacto microscópicas es menor pero, debido a la mayor presión, la extensión de cada una de ellas es mayor que en el caso anterior.

De ese modo la disminución del número de contactos queda compensado con el aumento individual del área de cada uno de ellos y el área total de contacto real es la misma en ambos casos.

El rozamiento por deslizamiento entre superficies secas puede reducirse considerablemente utilizando *lubricantes*. En un mural egipcio, fechado en 1900 A.C., se ve una gran estatua que es arrastrada mientras que un hombre va vertiendo aceite en su camino. Con el uso de los lubricantes se sustituyen las fuerzas de rozamiento entre sólidos por las de *viscosidad*, que son considerablemente menores. Como veremos en el próximo artículo, los gases son las sustancias que a las temperaturas ordinarias presentan menor viscosidad, de modo que una técnica muy eficaz para reducir el rozamiento entre dos superficies hasta un valor prácticamente nulo es introducir una capa de gas (*colchón de gas*) entre ellas. Actualmente nos servimos de éstas técnicas en los laboratorios, utilizando discos de nieve carbónica (hielo seco, CO₂), mesas y carriles de aire comprimido, ...

§8.12. Fuerzas de rozamiento en los fluidos.- Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido real, tal como un líquido o un gas, aparecen unas fuerzas que actúan sobre el cuerpo y que se oponen a su movimiento. Estas fuerzas, al igual que las estudiadas anteriormente, son fuerzas de rozamiento que tienen su origen en un gran número de interacciones entre las moléculas del cuerpo y las del fluido y, principalmente, entre las del propio fluido. Como el fenómeno es demasiado complejo no podemos establecer una ley exacta para estas fuerzas de rozamiento y, al igual que hicimos en el artículo anterior, nos conformamos con buscar unas leyes empíricas, y por lo tanto aproximadas, que si bien no nos explican las causas del rozamiento interno en los fluidos, nos permiten resolver numerosos problemas prácticos.

Con frecuencia, es suficiente considerar que la fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo en el seno de un fluido sea proporcional a alguna potencia de la velocidad. Entonces podemos expresar dicha fuerza en función de la velocidad como

$$f = -k v^n e_v \quad [8.25]$$

donde k es una constante cuyo valor depende principalmente de la geometría del cuerpo y de la naturaleza del fluido. El movimiento de un cuerpo en un medio fluido en el que la fuerza resistiva es proporcional a la velocidad o al cuadrado de la velocidad (o a una combinación lineal de ambas) fue estudiado por Newton en sus *Principia* en 1686. Una generalización de esos estudios para cualquier potencia de la velocidad fue llevada a cabo por J. BERNOULLI (1667-1748) en 1711. La denominación de *ley de rozamiento de Newton* se aplica normalmente para las fuerzas de rozamiento que son proporcionales al cuadrado de la velocidad; la de *ley de rozamiento de Stokes* se suele reservar para cuando la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad.

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido con una velocidad relativamente pequeña, podemos suponer, con buena aproximación, que la fuerza resistiva obedece a la ley de Stokes; esto es

$$f = -k v = -K \eta v \quad [8.26]$$

donde hemos descompuesto el coeficiente de rozamiento k en dos factores. El primero de ellos depende de la forma del cuerpo: así, en el caso de una esfera de radio R ,

Tabla 8.3.- Coeficientes de viscosidad para algunos fluidos a varias temperaturas.

fluido	temperatura (°C)	viscosidad	fluido	temperatura (°C)	viscosidad
aire	0	170.8 μ P	glicerina	20	14.90 P
	20	181.0 μ P		30	6.29 P
	40	190.4 μ P	azúcar	109	28. kP
agua	0	1.787 cP	aceite de motor		
	20	1.002 cP	ligero	16	113.8 cP
	40	0.653 cP		38	34.2 cP
alcohol	20	1.2 cP		100	4.9 cP
aceite de oliva	20	138.0 cP	pesado	16	660.6 cP
	40	36.3 cP		38	127.4 cP

un cálculo laborioso demuestra que

$$K = 6 \pi R \quad [8.27]$$

El segundo factor, η , es independiente del material y forma del cuerpo y depende de la naturaleza del fluido y de su temperatura. El coeficiente η representa la fricción interna del fluido; esto es, la fuerza de rozamiento entre las diferentes capas fluidas que se mueven con distinta velocidad. Esta fricción interna se llama *viscosidad* y η es el *coeficiente de viscosidad*. En el sistema de unidades **cgs**, el coeficiente de viscosidad se expresa en $\text{dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$, unidad que recibe el nombre de *poise* (P); normalmente se acostumbra a expresarla en centipoise (cP). La viscosidad de los gases es mucho menor que la de los líquidos y aumenta con la temperatura, al contrario de lo que ocurre con los líquidos. En la Tabla 8.3 presentamos los coeficientes de viscosidad de diferentes fluidos.

§8.13. Fuerzas de ligadura.- Cuando intentamos determinar la fuerza resultante que actúa sobre una partícula hemos de poner cuidado en incluir no solamente las *fuerzas activas*, tales como el peso, las fuerzas eléctricas, las fuerzas elásticas ejercidas por muelles, las tensiones en cuerdas ... sino también las llamadas *fuerzas de reacción vincular o de ligadura*.

Decimos que un punto material está ligado o vinculado cuando existen unas limitaciones físicas que constriñen sus movimientos; estas limitaciones físicas reciben el nombre de *ligaduras*. Así, por ejemplo, las bolas de un ábaco sólo pueden efectuar movimientos a lo largo de las varillas que las soportan; una bolita situada sobre la superficie de una esfera maciza está sometida a una ligadura tal que sólo puede moverse en dicha superficie o en la región exterior a la esfera; las moléculas de un gas encerrado en un recipiente están sometidas a unas ligaduras tales que sólo les permiten moverse en el interior del recipiente ...

Las ligaduras son susceptibles de clasificarse atendiendo a muy diversos puntos de vista. Así, vemos que existe una gran diferencia entre la ligadura impuesta por la varilla del ábaco y la impuesta por la esfera de los ejemplos anteriores. En efecto, la ligadura impuesta por la varilla del ábaco es eficaz en todas las direcciones perpendiculares a la varilla (de hecho las bolas sólo pueden moverse a lo largo de la varilla), en tanto que la ligadura impuesta por la superficie de la esfera sólo es eficaz en un sentido de la dirección perpendicular a la superficie esférica, ya que nada nos impide separar la bolita de dicha superficie (de hecho, la bolita abandonará la superficie tras hacer un cierto recorrido sobre ella).

De un modo general, la línea o la superficie a la que está vinculada la partícula recibe en nombre de *guía* y podemos clasificar las ligaduras en

Unilaterales: si la ligadura es eficaz en un solo sentido de la normal a la guía.

Bilaterales: si la ligadura es eficaz en los dos sentidos de la normal a la guía.

Bajo otro punto de vista, las ligaduras pueden clasificarse en

Holónomas: cuando la condición de ligadura es expresable mediante una ecuación de la forma

$$f(x, y, z; t) = 0 \quad [8.28]$$

que relaciona las coordenadas de la partícula y, eventualmente, el tiempo.

Un ejemplo de este tipo de ligaduras lo constituye una partícula obligada a moverse a lo largo de una curva o una superficie, ya que la ecuación de esa *guía* relaciona las coordenadas de la partícula en la forma de la ec. [8.28]. Así, por ejemplo, si la partícula está obligada a moverse a lo largo de la parábola de ecuación $y = 3x^2$, ésta ecuación expresa la condición de la ligadura.

No-holónomas: cuando la condición de ligadura no es expresable por una ecuación que relacione las coordenadas de la partícula y el tiempo, de la forma [8.28].

Las paredes de un recipiente que contiene un gas constituyen, para las moléculas del gas, una ligadura no-holónoma. La ligadura impuesta por la superficie de una esfera maciza a una bolita que se mueva en su exterior es también una ligadura no-holónoma, que puede expresarse por la desigualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2 \quad [8.29]$$

siendo x, y, z las coordenadas de la partícula y R el radio de la esfera. Así, en el campo gravitatorio, la bolita se moverá inicialmente sobre la superficie de la esfera pero finalmente la abandonará.

Las ligaduras pueden clasificarse atendiendo a si son o no independientes del tiempo en:

Esclerónomas: cuando la ligadura es independiente del tiempo.

Constituye un ejemplo de este tipo la ligadura correspondiente a un punto material obligado a moverse a lo largo de una curva fija, $f(x, y) = 0$, es decir que las coordenadas de la partícula deben satisfacer en todo instante la ecuación de la curva.

Reónomas: cuando la ligadura contiene explícitamente al tiempo.

Un ejemplo de este tipo de ligadura lo constituye una partícula obligada a moverse sobre una curva móvil, $f(x,y;t)=0$.

Podemos transformar un sistema con ligaduras en un sistema libre sin más que sustituir las ligaduras por las llamadas *fuerzas de ligadura*; *i.e.*, por unas fuerzas que produzcan los mismos efectos sobre el movimiento de la partícula que las ligaduras a las que sustituyen. Este modo de operar se conoce con el nombre de *Principio de liberación* de LAGRANGE (1736-1818) que se enuncia del siguiente modo:

Todo sistema con ligaduras puede suponerse libre de ellas con tal de añadir a las fuerzas activas las llamadas fuerzas de ligadura que producen los mismos efectos que las ligaduras a las que sustituyen.

De este modo podemos obtener un diagrama en el que se incluyen el cuerpo y todas las fuerzas que actúan sobre él, incluidas las de ligadura (una vez suprimidas las propias ligaduras); dibujaremos así el llamado *diagrama del cuerpo libre* (de ligaduras), que constituye un primer paso en la resolución de los problemas de la Mecánica.

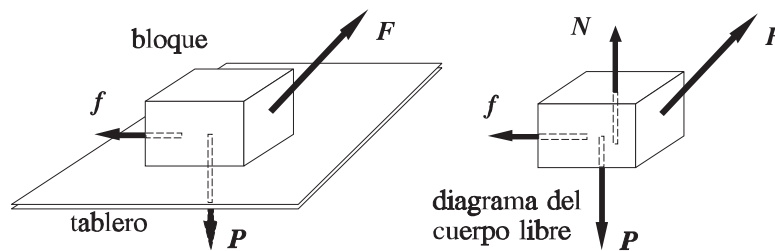


Figura 8.11

Así, por ejemplo, un bloque situado sobre el tablero horizontal de una mesa está sujeto a una ligadura (unilateral, no-holónoma y esclerónoma) que restringe sus movimientos: sólo podemos moverlo deslizando sobre el tablero o levantándolo sobre él. La ligadura impuesta por el tablero a los movimientos del bloque puede sustituirse por la fuerza de ligadura correspondiente que, en este caso, viene representada por la llamada *fuerza de reacción normal*, N , que ejerce el tablero sobre el bloque. Obsérvese que ésta fuerza y el peso, P , del bloque no forman una pareja de acción-reacción. El Principio de Liberación nos permite escribir:

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{f} + \mathbf{N} = m\mathbf{a} \quad [8.30]$$

En la Figura 8.11 hemos dibujado el *diagrama del bloque libre*, en el que hemos sustituido la *ligadura* (tablero) por la *fuerza de ligadura* (N) que produce el mismo efecto que aquélla.

Las fuerzas de ligadura están caracterizadas por las propiedades siguientes:

(1) Las fuerzas de ligadura no producen movimiento; tan sólo impiden los movimientos producidos por las fuerzas activas que no sean compatibles con las ligaduras.

(2) La magnitud de las fuerzas de ligadura se considera ilimitada, dependiendo de las fuerzas activas y anulándose cuando éstas se anulan.

(3) La dirección de las fuerzas de ligadura siempre es normal a la guía⁴.

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la resolución de los problemas de la mecánica de la partícula.

(a) Las coordenadas de la partícula dejan de ser independientes entre sí, puesto que están relacionadas por las ecuaciones de las ligaduras.

(b) Las fuerzas de ligadura no son conocidas *a priori*, sino que se encuentran entre las incógnitas del problema.

Imponer ligaduras a una partícula (o a un sistema de partículas) es reconocer la existencia de unas fuerzas (las de ligaduras) que no podemos especificar directamente y que sólo conocemos por los efectos que producen en el movimiento de la partícula (o del sistema de partículas).

Cuando las ligaduras tienen carácter holónomo, es relativamente fácil soslayar la dificultad que introduce el desconocimiento *a priori* de las fuerzas de ligadura. Bastará para ello introducir las ecuaciones que expresan las condiciones de ligadura junto a la ecuación diferencial del movimiento en la que solo intervendrán las componentes de las fuerzas activas en la dirección del movimiento permitido por las ligaduras; de ese modo evitamos que aparezcan las fuerzas de ligadura en la ecuación diferencial del movimiento. En el caso de que las ligaduras sean no-holónomas no será posible, en general, aplicar ese método y cada problema requerirá un tratamiento propio.

§8.14. Fuerzas de inercia.- Todas las fuerzas que hemos considerado hasta ahora son *fuerzas reales*, en el sentido de que podemos identificar a sus agentes; *i.e.*, otros cuerpos responsables de cada una de ellas. Conocidas las fuerzas que actúan sobre la partícula, la segunda ley del movimiento nos permite calcular la aceleración que ésta adquiere. Pero, evidentemente, necesitamos un referencial con respecto al cual mediremos la aceleración de la partícula y, además, es necesario que dicho referencial sea inercial, pues sólo en esos referenciales es válida la primera ley del movimiento (como ya vimos) y la segunda ley del movimiento (como veremos).

Sin embargo, en muchas ocasiones puede ser conveniente aplicar las leyes del movimiento desde el punto de vista de un observador no-inercial. Así, para describir el movimiento de un cuerpo sobre o cerca de la superficie terrestre puede resultar conveniente emplear un referencial ligado a la Tierra y que gira con ella (referencial o sistema de laboratorio) a pesar de que dicho referencial es no-inercial. En los referenciales no-inerciales, la fuerza que actúa sobre la partícula no es igual simplemente al producto de su masa por su aceleración, como ocurre en los referenciales inerciales. No obstante, en los referenciales no-inerciales, podemos seguir escribiendo la segunda ley de Newton en la forma habitual, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si

⁴ En algunos textos, esta propiedad se enuncia haciendo referencia a los *vínculos lisos*, ya que incluyen las fuerzas de rozamiento entre las de *ligadura*. Nosotros preferimos, siguiendo la tendencia más actual, considerar las fuerzas de rozamiento como *fuerzas pasivas* diferenciadas de las de *ligadura*, por lo que el enunciado que hemos dado es correcto.

consideramos, junto con las fuerzas reales, otras fuerzas, llamadas *fuerzas inerciales*, que dependen de la aceleración del referencial con respecto a un referencial inercial.

En este artículo vamos a centrar nuestra atención en los referenciales no-inerciales en movimiento de traslación (sin rotación) con respecto a un referencial inercial. En la siguiente lección nos ocuparemos ampliamente de los referenciales en rotación.

Imaginemos un referencial S , que consideraremos inercial, y un segundo referencial S' que se mueve respecto al primero con movimiento de traslación acelerado (uniformemente o no). Por simplicidad, escogeremos los ejes coordenados xyz e $x'y'z'$ de modo que los ejes correspondientes sean paralelos entre sí, como se muestra en la Figura 8.12. Consideraremos ahora una partícula P y sean \mathbf{r} y \mathbf{r}' los vectores de posición de dicha partícula con respecto a los orígenes O y O' de cada uno de los referenciales. Estos vectores de posición están relacionados en la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}' \quad [8.31]$$

donde $\mathbf{r}_O = \mathbf{OO}'$ es el vector de posición del origen del referencial S' con respecto al referencial S . Las velocidades de la partícula en cada uno de los referenciales, que designaremos por \mathbf{v} y \mathbf{v}' , respectivamente, están relacionadas por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}' \quad [8.32]$$

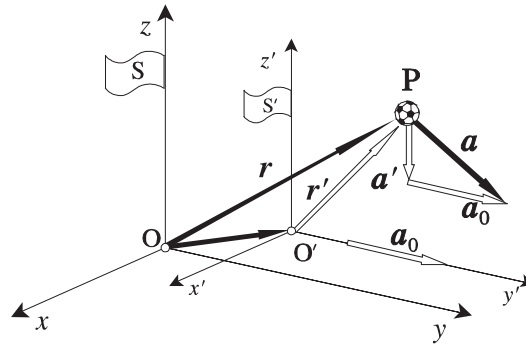


Figura 8.12

que se obtiene derivando con respecto al tiempo la ec. [8.31] y donde \mathbf{v}_O representa la velocidad del referencial S' con respecto al referencial S . A partir de la ec. [8.32], derivándola de nuevo con respecto al tiempo, encontramos la relación existente entre las aceleración de la partícula P en ambos referenciales; esto es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}' \quad [8.33]$$

donde \mathbf{a}_O representa la aceleración del referencial S' con respecto al referencial S . Esto es, los observadores S y S' miden, en general, aceleraciones diferentes para el movimiento de la partícula P .

Sabemos que en un referencial inercial se cumple

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad [8.34]$$

siendo \mathbf{F} la resultante de las fuerzas aplicadas a una partícula de masa m (que suponemos constante) y \mathbf{a} la aceleración de la misma en el referencial inercial. ¿Cómo se transformará la ec. [8.34] cuando hagamos las observaciones desde un referencial no-inercial?

Puesto que la fuerza resultante \mathbf{F} es la representación de las interacciones de la partícula con su medio ambiente, esto es, con los demás cuerpos existentes en las proximidades, el cambio de referencial no modificará, al menos en el ámbito de la Mecánica Clásica, dichas interacciones, de modo que \mathbf{F} permanecerá invariante. Del

mismo modo, la masa de la partícula se considera invariante al pasar de un referencial al otro. En cambio, la aceleración medida en el referencial S' no es la misma que la que se mide en el referencial S ; por consiguiente, *la aceleración no es invariante*. Obviamente, sustituyendo [8.33] en [8.34], podemos escribir

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}') = m\mathbf{a}_0 + m\mathbf{a}' \quad [8.35]$$

de modo que en el referencial S' la resultante de las fuerzas aplicadas, \mathbf{F} , no es igual simplemente al producto de la masa de la partícula por su aceleración en ese referencial, sino que hay que añadir un término, $m\mathbf{a}_0$, que representa el efecto de la aceleración del propio referencial no-inercial. La ec. [8.35] no tiene la forma que presenta habitualmente la segunda ley del movimiento, pero podemos conseguir que se le parezca si la escribimos en la forma

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a}' \quad [8.36]$$

pues entonces tenemos en el segundo miembro el producto de la masa de la partícula por su aceleración en el referencial no-inercial. En cambio, en el primer miembro de la ec. [8.36] nos encontramos, además de con la resultante de las fuerzas aplicadas, con el término $-m\mathbf{a}_0$ que, aunque no es una fuerza, tiene dimensiones de fuerza. Al trabajar en los referenciales no-inerciales es conveniente considerar el término $-m\mathbf{a}_0$ como si fuese una fuerza, a la que denominaremos *fuerza de inercia* y representaremos por \mathbf{F}_0 ; esto es,

$$\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0 \quad [8.37]$$

de modo que la ec. [8.36] puede ahora escribirse como

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}' \quad [8.38]$$

que es la forma que adopta la segunda ley del movimiento en los referenciales no-inerciales. En el referencial no-inercial hay que considerar, junto con las fuerzas reales, las fuerzas de inercia, ya que de ese modo la suma \mathbf{F}' de todas las fuerzas (reales y de inercia) será igual al producto de la masa de la partícula por su aceleración en el referencial no-inercial.

Las fuerzas de inercia reciben también el nombre de *fuerzas ficticias*, en contraposición al de *fuerzas reales*, ya que a diferencia de éstas no las podemos asociar con ningún cuerpo particular en el medio ambiente de la partícula sobre la que actúan; *i.e.*, *no tienen agente*. Representan la no-inercialidad del referencial y, naturalmente, al observar el movimiento de la partícula desde un referencial inercial las fuerzas de inercia desaparecen. Las fuerzas de inercia son simplemente una técnica que nos permite aplicar las leyes de Newton en su forma habitual a ciertos fenómenos cuando nos empeñamos en describirlos desde el punto de vista de un observador no-inercial. Las fuerzas de inercia son simples ficciones que introducimos para poder seguir escribiendo $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, aún cuando la aceleración se mida con respecto a un referencial no-inercial. Aunque las fuerzas de inercia son ficticias (falsas), para un observador no-inercial parecen tan reales como las demás debido a la confianza que tiene el observador en la validez de las leyes de Newton.

Cualquier cosa ficticia tiende a parecerse confusa; para aclarar lo que representan las fuerzas de inercia volveremos a los experimentos idealizados, sobre la plataforma lisa de un vagón de ferrocarril acelerado, de los que nos servimos en la Lección 6 para comprender la diferencia existente entre los referenciales inerciales y no-inerciales.

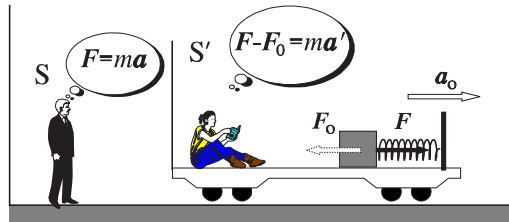


Figura 8.13

En primer lugar consideraremos un bloque liso unido mediante un muelle dinamométrico a un punto fijo del vagón (Figura 8.13). El dinamómetro permite, a los observadores S y S', medir una fuerza real F (debida a la tensión del muelle) que actúa sobre el bloque en la dirección y sentido de la aceleración a_0 del vagón. El

observador S entenderá que esa fuerza F es la causante de la aceleración que tiene el bloque, $a = a_0$ (ya que el bloque tiene la misma aceleración que el vagón) y escribirá la segunda ley de Newton en la forma

$$F = ma_0 \quad [8.39]$$

Pero el observador S', al ver que el bloque está en reposo con respecto a él, sospechará la existencia de una fuerza que equilibre a la fuerza F , de modo que incluirá una fuerza F_0 aunque no sepa identificar su agente. Así

$$F + F_0 = 0 \quad \rightarrow \quad F - ma_0 = 0 \quad [8.40]$$

que es, a fin de cuentas, la misma que estableció el observador S. La fuerza de inercia $F_0 = -ma_0$ tiene sentido para el observador S' pero no lo tiene para el observador S; en consecuencia es una fuerza ficticia.

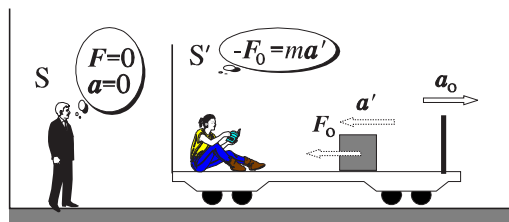


Figura 8.14

Liberemos ahora el bloque de modo que pueda moverse sin fricción sobre la plataforma del vagón (Figura 8.14). Cuando aumenta la velocidad del vagón el bloque se moverá sobre la plataforma con velocidad creciente (acelerado) en sentido contrario a la aceleración del vagón, de tal modo que, si el vagón se encontraba ini-

cialmente en reposo sobre la vía, el bloque permanecerá en reposo con respecto al observador S (ya que al no existir rozamiento no puede ser arrastrado por el movimiento del vagón). El observador S entenderá que al no existir fuerza aplicada al bloque (en la dirección horizontal) la aceleración de éste sea nula. En cambio, el observador S' observa que el bloque está acelerado en su propio referencial (el vagón), con $a' = -a_0$, y sospechará la existencia de una fuerza, $F_0 = -ma_0$, que sería la responsable de esa aceleración. Evidentemente, como en el caso anterior, esa fuerza es ficticia.

En definitiva, en la resolución de los problemas de la Mecánica podemos elegir entre dos alternativas:

- (1) Escoger un referencial inercial y considerar únicamente las fuerzas reales.
- (2) Escoger un referencial no-inercial y considerar no sólo las fuerzas reales sino también las llamadas fuerzas de inercia, que vienen expresadas siempre por $-ma_0$, siendo a_0 la aceleración del referencial no-inercial con respecto a un referencial inercial.

De ordinario escogeremos la primera alternativa, pero en ocasiones será más conveniente escoger la segunda; ambas son equivalentes.

Ejemplo I.- Una cuña de masa M y ángulo θ desliza sin rozamiento sobre un tablero horizontal fijo, como se muestra en la figura. Sobre la cuña desliza, también sin rozamiento, un bloque de masa m .
a) Determinar la aceleración de la cuña. **b)** Determinar la aceleración del bloque respecto de la cuña y respecto del tablero.

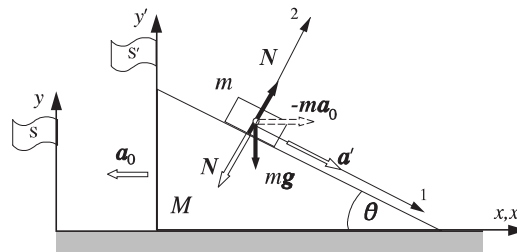


Figura 8.15

Asumimos que la cuña experimenta una aceleración de retroceso a_0 en la dirección que se indica en la Figura 8.15. En el referencial S (inercial), en lo que concierne al movimiento horizontal de la cuña, escribiremos

$$\begin{aligned}
 -N \operatorname{sen}\theta &= -Ma_0 \\
 \rightarrow N &= \frac{Ma_0}{\operatorname{sen}\theta}
 \end{aligned}$$

Para analizar el movimiento del bloque, resulta conveniente describirlo en el referencial S' ligado a la cuña, que posee una aceleración a_0 (referencial no-inercial). Así, aplicaremos la segunda ley de Newton al bloque, incluyendo todas las fuerzas que "actúan" sobre él, esto es: mg (peso), N (reacción vincular o fuerza de ligadura) y $-ma_0$ (fuerza de inercia);

$$mg + N + (-ma_0) = ma'$$

de donde, tomando las componentes en la base vectorial 123 que se indica en la Figura 8.15, tenemos

$$\begin{cases}
 mg \operatorname{sen}\theta + ma_0 \operatorname{cos}\theta = ma' & \rightarrow a' = g \operatorname{sen}\theta + a_0 \operatorname{cos}\theta \\
 -mg \operatorname{cos}\theta + N + ma_0 \operatorname{sen}\theta = 0 & \rightarrow N = m(g \operatorname{cos}\theta - a_0 \operatorname{sen}\theta)
 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de N en la segunda ecuación y despejando a_0 obtenemos la aceleración de la cuña:

$$a_0 = \frac{mg \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} \quad \Rightarrow \quad a_0 = (-a_0 \ 0 \ 0)_{xyz}$$

entonces, de la primera ecuación obtenemos la aceleración a' del bloque respecto de la cuña:

$$a' = g \operatorname{sen} \theta + a_0 \cos \theta = \frac{(M+m)g \operatorname{sen} \theta}{M+m \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}' = (a' \cos \theta \quad -a' \operatorname{sen} \theta \quad 0)_{xyz}$$

Para obtener la aceleración \mathbf{a} del bloque respecto del tablero tendremos en cuenta que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_x = a'_x - a_0 = a' \cos \theta - a_0 = \frac{Mg \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{M+m \operatorname{sen}^2 \theta} \\ a_y = a'_y = -a' \operatorname{sen} \theta = -\frac{(M+m)g \operatorname{sen}^2 \theta}{M+m \operatorname{sen}^2 \theta} \end{cases}$$

cuyo módulo es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{m \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{M+m \operatorname{sen}^2 \theta}\right)^2} g \operatorname{sen} \theta = \sqrt{g^2 + a_0^2} \operatorname{sen} \theta$$

y su dirección forma un ángulo ϕ con la horizontal, dado por

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{|a_y|}{|a_x|} = \operatorname{arctg} \left(\frac{M+m}{M} \operatorname{tg} \theta \right)$$

§8.15. Estática de la partícula. Principio de D'Alembert.- La relación existente entre el movimiento de un cuerpo y sus causas es el objeto de estudio de la Dinámica, la cuál nos ha enseñado que el movimiento de un cuerpo depende de su masa y de las acciones que sobre él ejercen otros cuerpos que constituyen su medio ambiente; dichas acciones vienen representadas por el concepto físico-matemático que llamamos *fuerza*. Los efectos de dichas fuerzas pueden contrarrestarse entre sí, dando lugar a una situación análoga a la que se presentaría si no se ejerciera fuerza alguna sobre el cuerpo. El capítulo de la Dinámica que trata sólo aquellos sistemas en los que la fuerza resultante es nula recibe el nombre de *Estática*. Ahora nos ocuparemos solamente del estudio de la *Estática de la Partícula*, dejando para más adelante el estudio de la *Estática de los Sistemas de Partículas*, de los que el sólido rígido es un caso especial.

Decimos que una partícula se encuentra en *equilibrio* en un cierto referencial inercial cuando su aceleración es cero en ese referencial. En consecuencia,

el equilibrio implica que la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la partícula debe ser nula;

esto es

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad [8.41]$$

Podemos generalizar la definición anterior para los referenciales no inerciales, ya que la ecuación del movimiento en un referencial no inercial [8.36] puede escribirse en la forma

$$\mathbf{R} - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a}' = 0 \quad [8.42]$$

cuando la aceleración de la partícula es nula en ese referencial, *i.e.*, cuando la partícula está en equilibrio en él. La ecuación anterior puede ser considerada como una ecuación de «equilibrio» que establece que

la resultante de todas las fuerzas «aplicadas» a la partícula, incluidas las fuerzas de inercia (en su caso), debe ser nula.

Este enunciado constituye la esencia del *Principio de D'ALEMBERT*. Bajo este punto de vista, la Dinámica se reduce a la Estática, ya que siempre podremos plantear nuestro problema (¿dinámico?) en un referencial en el que la partícula no presente aceleración (*i.e.*, se encuentre en equilibrio).

Puesto que la partícula es considerada como un cuerpo de dimensiones muy pequeñas (puntual), todas las fuerzas aplicadas a la partícula (reales e inerciales, en su caso) serán concurrentes en un punto, de modo que no encontraremos dificultad al efectuar la suma vectorial indicada en la expr. [8.41] (o en la [8.42], en su caso). Esta ecuación expresa la *condición de equilibrio para la partícula*. Como consecuencia directa de ella se tiene que el equilibrio de una partícula no se altera si ...

- (1) se suprimen dos fuerzas iguales y opuestas,
- (2) se incorporan dos fuerzas iguales y opuestas,
- (3) se sustituyen dos o más fuerzas por su suma efectuada,
- (4) se sustituye una fuerza por otras que la tengan como resultante.

Es conveniente que no confundamos el concepto de *equilibrio* con el de *reposo*.

Una partícula puede estar en reposo en un cierto referencial y no hallarse en equilibrio en él. Así, por ejemplo, cuando lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba, en el punto más alto de su trayectoria la piedra se encuentra instantáneamente en reposo, pero no en equilibrio puesto que la fuerza *peso* no está equilibrada por ninguna otra. Por esa razón la piedra comienza a caer (aceleradamente) hacia abajo.

Por otra parte, una partícula puede estar en equilibrio en un cierto referencial y no estar en reposo en ese referencial. Un ejemplo de este tipo lo constituye la partícula libre; al no actuar fuerzas sobre ella, su aceleración será nula, lo que significa que su velocidad será constante en un referencial inercial. Por supuesto que siempre podemos encontrar un referencial inercial en el que la partícula libre estará en reposo.

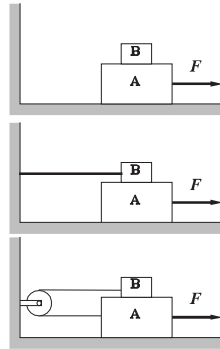
La situación más corriente es aquella en la que la partícula se encuentra simultáneamente en reposo y en equilibrio en un referencial dado; por eso es frecuente que muchas personas consideren, erróneamente, ambos conceptos como sinónimos.

Problemas

8.1.- Utilizar la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton para demostrar que el periodo T de un planeta que se mueve en un órbita circular alrededor del Sol está relacionado con el radio de la órbita por la *tercera ley de Kepler*, $T^2 = kr^3$, y determinar la constante k .

8.2.- Dos esferillas idénticas cuelgan mediante sendos hilos de seda, de longitud L , de un mismo punto. Cuando se les suministra una misma carga eléctrica a cada una de las esferillas, los hilos de suspensión forman entre sí un ángulo θ . Expresar el valor de la carga de cada esferilla en función de dicho ángulo.

8.3.- Una partícula de masa m que tiene una carga eléctrica q se lanza desde una gran distancia, con una velocidad v_0 , directamente contra otra partícula fija en el espacio, de masa M y carga eléctrica Q . **a)** Estudiar cualitativamente el movimiento de la partícula m en los casos en que las cargas eléctricas sean del mismo y de distinto signo. **b)** Determinar la distancia mínima de aproximación cuando ambas cargas son del mismo signo.



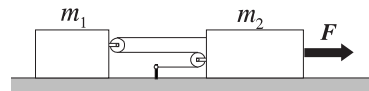
Prob. 8.4

8.4.- El bloque A de la figura pesa 15 kg y el bloque B pesa 5 kg. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto vale 0.20. Calcular la magnitud de la fuerza F necesaria para arrastrar el bloque B hacia la derecha con velocidad constante, en cada uno de los casos que se muestran en la figura.

8.5.- Un estudiante trata de encontrar experimentalmente el coeficiente de rozamiento entre

un ladrillo y un tablón. Para ello coloca el ladrillo sobre el tablón y va aumentando gradualmente el ángulo de inclinación de éste. Cuando el ángulo es de 30° el ladrillo comienza a deslizar, acelerándose hacia abajo. Entonces comienza a reducir progresivamente el ángulo de inclinación y observa que cuando éste es de 25° se detiene. Obtener los coeficientes de rozamiento a partir de esas observaciones.

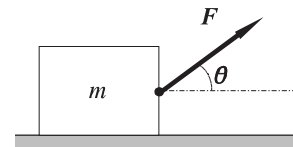
8.6.- En el sistema que se muestra en la figura, calcular la aceleración de cada uno de los dos bloques en los siguientes supuestos: **a)** no existe ningún rozamiento; **b)** el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es μ .



Prob. 8.6

8.7.- El bloque de la figura pesa 100 kg y se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0.50. Mediante una cuerda ligera unida al bloque y que forma un ángulo θ con la horizontal tratamos de mover el bloque.

Encontramos que la magnitud de la fuerza mínima necesaria para mover el bloque depende del valor del

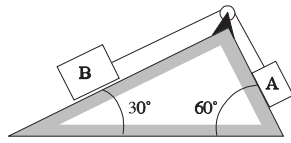


Prob. 8.7

ángulo θ . **a)** Expresar la magnitud de dicha fuerza mínima en función del ángulo θ . **b)** ¿Cuál es el valor del ángulo θ más eficaz para mover el bloque?

8.8.- En el sistema de la figura, la masa del bloque A es 20 kg y los coeficientes de rozamiento estático y cinético de cada bloque con los planos inclinados valen 0.30 y 0.25, res-

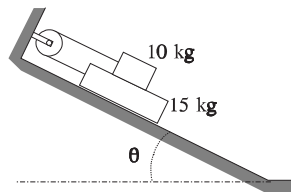
pectivamente.
a) ¿Cuál debe ser la masa mínima del bloque B para que el sistema comience a moverse hacia la izquierda?



Prob. 8.8

b) Una vez iniciado el movimiento, ¿cuál será la aceleración del sistema?

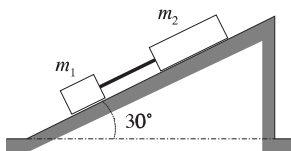
8.9.- Dos bloques de madera se encuentran sobre un plano inclinado, unidos entre sí por una cuerda ligera que pasa por una polea de rozamiento e inercia despreciables, como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto vale 0.30. Determinar: **a)** El valor crítico del ángulo de inclinación del plano que impide el deslizamiento de los bloques; **b)** la aceleración de los bloques si el ángulo de inclinación es de 80°.



Prob. 8.9

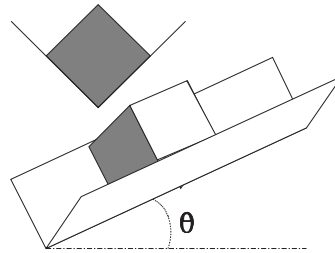
8.10.- Desde el pie de un plano inclinado 30° sobre la horizontal se lanza, hacia arriba a lo largo del plano inclinado, un bloque de 3 kg, con una velocidad inicial de 4 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano vale 0.60. **a)** Calcular la distancia que recorrerá el bloque sobre el plano. **b)** ¿Volverá a descender el bloque? En caso afirmativo, determinar la velocidad del bloque cuando llegue al pie del plano.

8.11.- Dos bloques, de masas $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 8$ kg, están unidos mediante una varilla rígida y ligera y resbalan por un plano inclinado 30°, como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y cada uno de los bloques es 0.20 y 0.30, respectivamente. Calcular: **a)** la aceleración del sistema y **b)** la tensión en la varilla, indicando si es tensora o compresora.



Prob. 8.11

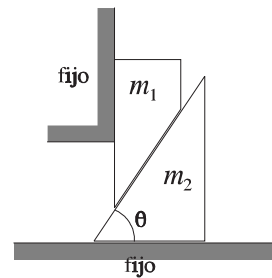
8.12.- Un bloque de masa m resbala por un canal en forma de V, como se muestra en la figura. Si los coeficientes estático y cinético de rozamiento entre el bloque y las paredes del canal valen 0.3 y 0.2, respectivamente, obte-



Prob. 8.12

ner: **a)** El valor mínimo del ángulo θ para el que el bloque comienza a deslizar; **b)** la aceleración del bloque si el ángulo θ vale el doble del calculado en el apartado anterior.

8.13.- En el sistema que se representa en la figura, el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies es μ . **a)** Escribir las ecuaciones del movimiento de cada una de las cuñas.



Prob. 8.13

b) Encontrar las aceleraciones de las cuñas en el caso de que sean $m_1=m_2$, $\theta=45^\circ$ y $\mu=0.1$. **c)** ¿Para qué valores de μ no habrá movimiento?

8.14.- La resistencia que presenta el aire al movimiento de caída de un paracaidista puede considerarse proporcional a la velocidad instantánea de éste. De acuerdo con esta hipótesis: **a)** expresar la velocidad, la aceleración y el espacio recorrido en función del tiempo, para $t>0$, suponiendo que en el instante $t=0$ (cuando se abrió el paracaídas) el paracaidista tenía una velocidad v_0 ; **b)** demostrar que el paracaidista alcanza una cierta *velocidad límite* y obtener el valor de dicha velocidad.

8.15.- Dejamos caer una esferilla lisa y homogénea, de radio r y densidad ρ , desde la superficie libre de un fluido viscoso, de coeficiente de viscosidad η y densidad $\delta(<\rho)$. **a)** Demostrar que la velocidad y el espacio

recorrido por la esfera pueden expresarse en función del tiempo como

$$v = v_{\text{lím}} (1 - e^{-\alpha t})$$

$$x = v_{\text{lím}} \left(t - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)$$

donde $\alpha = \frac{9\eta}{2\rho r^2}$ y $v_{\text{lím}}$ es la *velocidad*

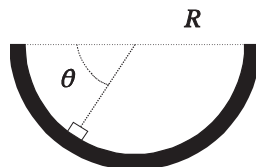
límite, dada por

$$v_{\text{lím}} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\rho - \delta)$$

b) Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que la esfera alcance una velocidad igual al 95% de la velocidad límite y el espacio recorrido por la esfera hasta ese momento.

8.16.- Una partícula de masa m se mueve horizontalmente con una velocidad v_0 . En un determinado momento penetra en un medio resistivo que le presenta una fuerza resistente dada por $\alpha^2 v^3 + \beta^2 v$, donde α y β son constantes. Demostrar que, independientemente del valor de la velocidad inicial de la partícula, su alcance de penetración en el medio no será mayor que $\pi m / 2\alpha\beta$ y que sólo se detiene para $t \rightarrow \infty$.

8.17.- Un cuerpo de pequeñas dimensiones desliza por el interior de una oquedad hemisférica lisa, de radio R , como se muestra en la figura. El cuerpo partió del reposo desde el borde de la oquedad. **a)** Expresar la velocidad del cuerpo y la reacción de la superficie sobre él en función del ángulo θ . **b)** Calcular la velocidad y la reacción de la superficie cuando el cuerpo pasa por el fondo de la oquedad. Analizar el resultado.



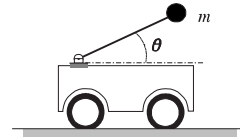
Prob. 8.17

8.18.- Una bolita está ensartada en un alambre liso (de modo que puede deslizar por él sin rozamiento) cuya forma es la de una parábola de eje vertical y ecuación $y = x^2$. Supongamos que abandonamos la bolita (en reposo) en el punto de coordenadas (x_0, y_0) . Calcular la velocidad de la bolita y la fuerza de ligadura cuando pasa por el fondo de la parábola.

8.19.- Sobre una plataforma de un camión se encuentra una caja que pesa 20 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la caja y la plataforma valen 0.10 y 0.06, respectivamente. Calcular la aceleración que adquiere la caja con respecto al camión cuando éste: **a)** tiene una aceleración de 0.5 m/s^2 ; **b)** ídem de 1 m/s^2 ; **c)** frena a razón de 2 m/s^2 .

8.20.- Una plomada cuelga del techo de un vagón de ferrocarril que circula por una vía recta a nivel, de modo que puede utilizarse como un acelerómetro. **a)** Deducir la fórmula que relaciona la aceleración del tren con el ángulo que forma la plomada con la vertical. **b)** Calcular la aceleración del tren cuando dicho ángulo es de 15° .

8.21.- El extremo inferior de la varilla rígida y ligera representada en la figura está articulado a la plataforma de la vagoneta. En el otro extremo



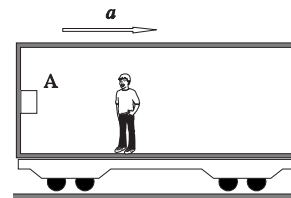
Prob. 8.21

de la varilla está sujeta una masa m de pequeñas dimensiones. Expresar el valor del ángulo θ que forma la varilla con la horizontal en función de la aceleración de la vagoneta. ¿Cómo describirá la situación un observador que viaje en la vagoneta?

8.22.- Un hombre está de pie sobre la plataforma de un autobús que marcha con una celeridad constante de 36 km/h por una avenida recta. ¿Bajo qué ángulo y en qué dirección debe apoyarse el hombre para evitar caer cuando en 3 segundos la velocidad del autobús cambia: **a)** a 54 km/h ; **b)** a 9 km/h y **c)** el autobús se detiene.

8.23.- a) ¿Qué aceleración deberá tener el vagón de la figura para que el bloque A no caiga, si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la pared es μ ? ¿Cómo describirá el comportamiento del bloque un observador situado en el vagón?

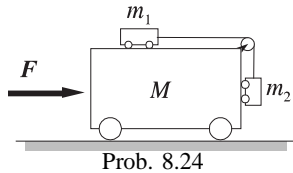
b) Si la aceleración del vagón es la mitad de la calculada en el apartado anterior, ¿cuál será la aceleración del bloque respecto del



Prob. 8.23

vagón? ¿Que tiempo empleará el bloque en descender una distancia h ?

8.24.- a) ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse constantemente al sistema que se muestra en la figura de modo que los cuerpos de masa m_1 y m_2 no se muevan con respecto al M . **b)** Si la fuerza aplicada es la mitad de la calculada en el apartado anterior, ¿Cuál será la aceleración de los bloques m_1 y m_2 respecto del bloque M ?

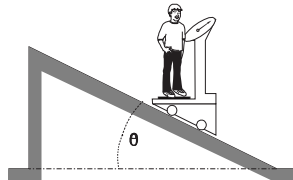


Prob. 8.24

8.25.- En el dispositivo que se muestra en la figura del Problema 8.24 se suprimen las ruedecillas de los bloques m_1 y m_2 , apareciendo un rozamiento, caracterizado por un coeficiente μ , entre todas las superficies en contacto. Demostrar que para que los bloques m_1 y m_2 permanezcan en reposo respecto a la vagoneta, ésta deberá tener una aceleración a_0 comprendida en el intervalo

$$\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + \mu m_2} g \leq a_0 \leq \frac{m_2 + \mu m_1}{m_1 - \mu m_2} g$$

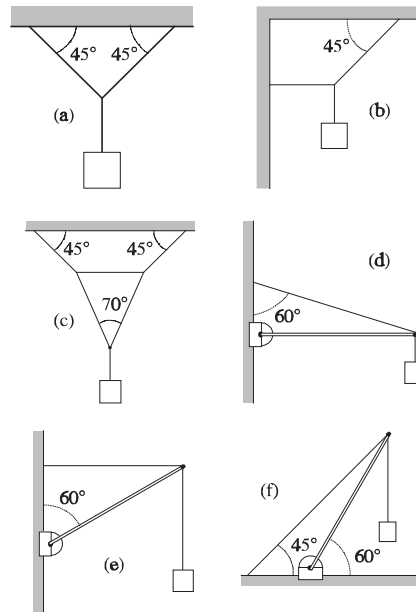
8.26.- Un niño coloca una báscula sobre una plataforma que puede deslizarse sin fricción sobre un plano inclinado,



Prob. 8.26

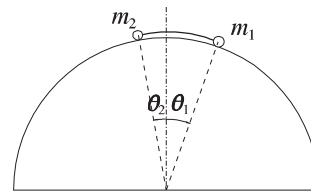
como se indica en la figura. El niño se sube en la báscula y lee la indicación de su "peso" cuando la plataforma desciende (aceleradamente) por el plano inclinado. Si el peso del niño en condiciones normales es P , ¿cuál será la indicación de la báscula?

8.27.- En cada uno de los sistemas representados en la figura, se nos pide calcular las tensiones en las cuerdas y en los puntales. En todos los casos podemos suponer que las cuerdas son inextensibles, flexibles y ligeras, que los puntales son rígidos y de masas despreciables y que el peso del cuerpo es de 100 kg.



Prob. 8.27

8.28.- Dos pequeños cuerpos, cuyas masas se encuentran en la relación de 5/3, están unidos por un hilo inextensible de masa despreciable, de 10 cm de longitud, y se encuentran situados



Prob. 8.28

sobre una circunferencia lisa vertical, de 20 cm de radio, una a cada lado del diámetro vertical. Determinar la posición de equilibrio de las dos masas.

8.29.- Una cadena flexible, que pesa 10 kg, cuelga entre dos ganchos situados a una misma altura (vide figura). En cada extremo la cadena forma un ángulo θ con la horizontal.

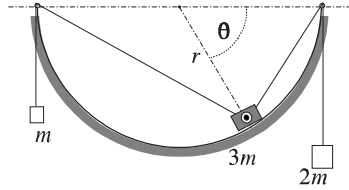


Prob. 8.29

a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza ejercida por la cadena

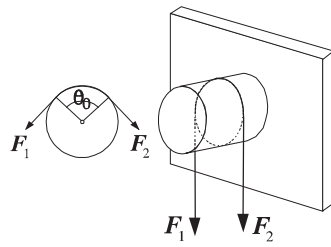
sobre cada uno de los ganchos? **b)** ¿Cuál es la tensión en el punto más bajo de la cadena?

8.30.- Un pequeño bloque, de masa $3m$, desliza sin fricción sobre la superficie interior de un oquedad hemisférica de radio r y está unida, mediante sendos hilos ligeros, a dos



Prob. 8.30

pesas, de masa m y $2m$, como se muestra en la figura. Determinar la posición de equilibrio del sistema (valor del ángulo θ) y la reacción sobre la superficie de la oquedad.



Prob. 8.31

8.31.- Una cuerda flexible rodea a un cilindro fijo de radio r , como se muestra en la figura. Sean μ el coeficiente de rozamiento estático entre la superficie del cilindro y la cuerda y θ_0 el ángulo de contacto entre ellas. **a)** Demostrar que, en las condiciones críticas de deslizamiento de la cuerda, las tensiones de la cuerda a cada lado del cilindro están relacionadas entre sí por $F_2 = F_1 \exp(\mu \theta_0)$, en el supuesto de que sea $F_2 > F_1$, de modo que resulta ser independiente del radio del cilindro, dependiendo tan sólo del valor del ángulo de contacto. **b)** ¿Es generalizable el resultado anterior para $\theta_0 > 2\pi$?