MATERIAL: FM-01

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

La Física tiene por objetivo describir la naturaleza y los fenómenos que en ella ocurren, a través de magnitudes y relaciones entre magnitudes. La física hizo sus mayores progresos en el siglo XVI cuando descubrió que era posible analizar por medio de las matemáticas. La experimentación y el uso de las matemáticas condujeron al enorme éxito de las ciencias. Los experimentos permiten verificar nuestras leyes y las matemáticas nos permiten expresar nuestros resultados sin ambigüedades.

Sistema Internacional (SI)

En 1960, un comité internacional estableció un conjunto de patrones para estas **magnitudes fundamentales**. El sistema que se ingresó es una adaptación del sistema métrico, y recibe el nombre de **Sistema Internacional (SI)** de unidades.

Magnitudes Fundamentales	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

También existen **Magnitudes Derivadas** que se obtienen a partir de las fundamentales por medio de ecuaciones matemáticas. Como por ejemplo, el área que es derivada de longitud.

Nota: en cualquier fenómeno físico que se analiza, se deben tener en cuenta las unidades de medidas con las cuales se trabaja, ya que deben ser compatibles, de lo contrario se procede a la conversión de unidades.

Ejemplo:

1. La unidad fundamental de las siguientes unidades es:

   A) volt
   B) coulomb
   C) ohm
   D) ampere
   E) watt

Escalares

Son magnitudes físicas fáciles de reconocer, ya que para identificarlas sólo necesitamos saber su *magnitud*, en algunos casos es necesario acompañarlos de la unidad de medida como los que se mencionan a continuación.

Ejemplos: rapidez, masa, tiempo, distancia, área, perímetro, densidad, volumen, temperatura, etc.

Vectores

Un vector se identifica por 3 características fundamentales: magnitud (módulo o largo), sentido (indicado por la flecha) y dirección (indicado por la línea recta que pasa sobre el vector).

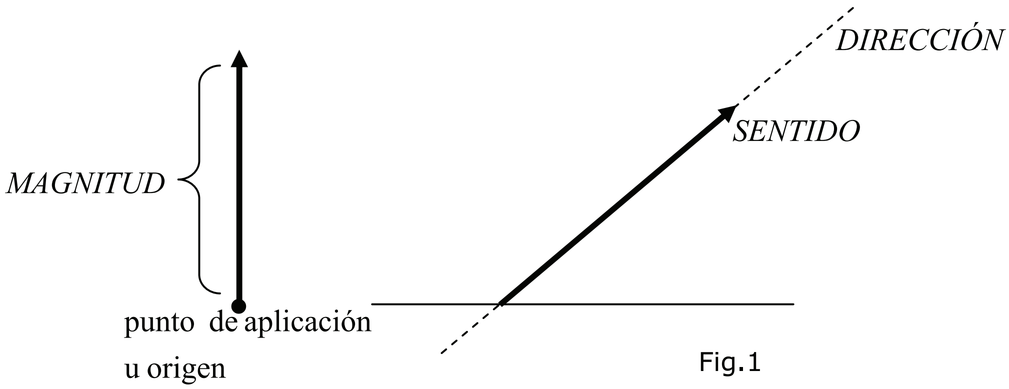


Fig.1

Una magnitud vectorial se simboliza con una letra que lleva una flecha en su parte superior $\vec{A}$.

Si queremos referirnos a la magnitud del vector $\vec{A}$ se denota por $|\vec{A}|$.

Algunos ejemplos de magnitudes vectoriales son: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, momentum lineal, torque, etc.

Ejemplo:

2. De las siguientes afirmaciones sobre el vector $\overrightarrow{PQ}$

I) El punto P es el origen de $\overrightarrow{PQ}$.
II) El vector $\overrightarrow{PQ}$ se puede abreviar $\overrightarrow{QP}$.
III) El punto Q es el término de $\overrightarrow{PQ}$.

De estas afirmaciones es (son) verdadera (s)

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II, y III

Representación de un vector

Sea $\vec{C}$ un vector tridimensional (tres dimensiones X, Y, Z)

$$\vec{C} = (C_X, C_Y, C_Z)$$

Donde:

C_X es la componente del vector en la dirección de X.
C_Y es la componente del vector en la dirección de Y.
C_Z es la componente del vector en la dirección de Z.

La otra forma de escribir un vector es en función de vectores unitarios, es decir que tienen magnitud uno, asociados a cada eje.

- Al eje X asociamos el vector unitario $\vec{i}$
- Al eje Y asociamos el vector unitario $\vec{j}$
- Al eje Z asociamos el vector unitario $\vec{k}$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

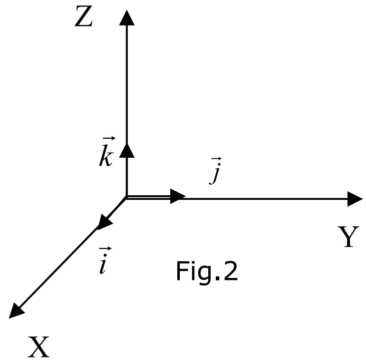


Fig.2

El vector $\vec{C}$ queda representado de la siguiente forma:

$$\vec{C} = C_X\vec{i} + C_Y\vec{j} + C_Z\vec{k}$$

La magnitud de $\vec{C}$ es:

$$|\vec{C}| = \sqrt{(C_X)^2 + (C_Y)^2 + (C_Z)^2}$$

Proyección de un vector

Proyectar un vector es trazar la perpendicular a los ejes cartesianos
por ejemplo en dos dimensiones la figura 3 muestra al vector $\vec{A}$ y las dos componentes que se obtienen en esta proyección A_X y A_Y donde:

A_Y = A sen α
A_X = A cos α

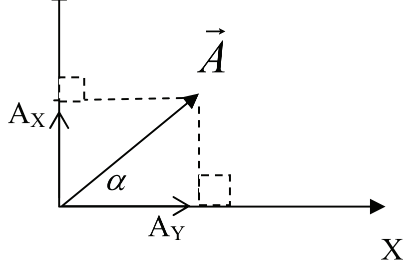


Fig.3

Ejemplo:

3. De acuerdo a la figura 4, la componente del vector en la dirección del eje X es

   A) $|\vec{A}|\cdot sen\alpha$

   B) $|\vec{A}|\cdot tg\alpha$

   C) $|\vec{A}|\cdot \cos\alpha$

   D) $|\vec{A}|\cdot \sec\alpha$

   E) $|\vec{A}|\cdot \csc\alpha$

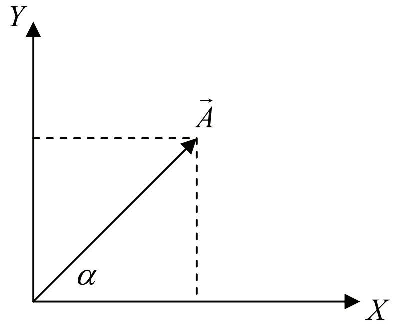


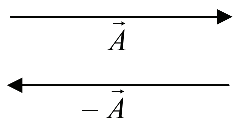
Fig. 4

Álgebra de vectores

i. Adición (método del triángulo)

Al sumar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, primero se dibuja $\vec{A}$ y a continuación se dibuja $\vec{B}$, procurando mantener las proporciones, luego el origen de $\vec{A}$ se une con el final de $\vec{B}$ (punta de la flecha).

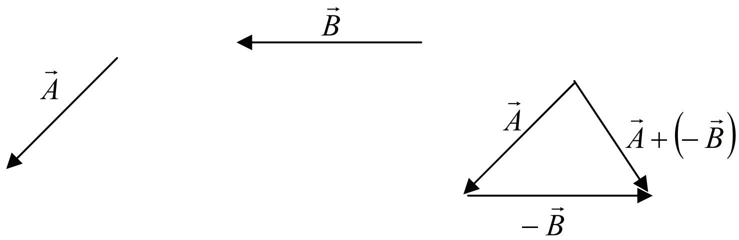
Nota 1:
Encontrar el *opuesto* de un vector equivale a hallar otro, que posea igual magnitud y dirección, pero con sentido opuesto. Matemáticamente el opuesto de $\vec{A}$ es $-\vec{A}$.



Nota 2:
Dos vectores paralelos de sentido opuesto se llaman antiparalelos.

ii. Sustracción

Se procede como en la suma, es decir, para obtener $\vec{A}-\vec{B}$, se procede a efectuar la operación $\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$ obteniéndose así una suma de dos vectores.



Ejemplo:

4. La figura 5 muestra dos vectores perpendiculares ($\vec{U}$ y $\vec{V}$). Si $|\vec{U}| = 8$ y $|\vec{V}| = 15$, entonces la magnitud del vector resultante de la resta entre ellos es

   A) 7
   B) 8
   C) 15
   D) 17
   E) 23

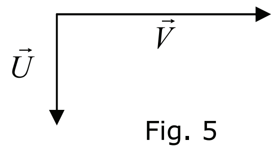


Fig. 5

iii. Producto Punto (escalar)

Sean

$$\vec{A} = (A_X, A_Y, A_Z) \quad \text{y} \quad \vec{B} = (B_X, B_Y, B_Z)$$

El producto punto entre ellos se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_X \cdot B_X + A_Y \cdot B_Y + A_Z \cdot B_Z$$

Nota: el resultado del producto punto es un escalar.

Propiedades:
- el producto punto es conmutativo $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- el producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero.

iv. Producto Cruz (vectorial)

Utilizando los vectores anteriores, el producto cruz se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix} = (A_Y B_Z - A_Z B_Y)\vec{i} + (A_Z B_X - A_X B_Z)\vec{j} + (A_X B_y - A_y B_X)\vec{k}$$

Nota: el resultado del producto cruz es un vector perpendicular al vector $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Propiedades:
- el producto cruz no es conmutativo
- el producto cruz entre dos vectores paralelos es cero.

Ejemplo:

5. Sean $\vec{A} = (2, k)$ y $\vec{B} = (4,4)$, k es una constante
   El valor de k para que los vectores sean perpendiculares entre sí debe ser:

   A) -1
   B) 1
   C) 2
   D) -2
   E) 0

Transformación de Unidades

En muchas situaciones en Física, tenemos que realizar operaciones con magnitudes que vienen expresadas en unidades que no son homogéneas. Para que los cálculos que realicemos sean correctos, debemos transformar las unidades de forma que se cumpla el principio de homogeneidad.
Por ejemplo si tenemos una rapidez v_0 que esta expresada en km/h y la queremos expresar en m/s deberemos dividir v_0 por 3,6 y así quedara v_0 en m/s esto se debe a lo siguiente:

1 km = 1000 m; para pasar de kilómetro a metro debemos multiplicar por 1000
1 h = 3600 s; para pasar de hora a segundo debemos multiplicar por 3600

De lo anterior si tenemos v = 72 km/h para llevarlo a m/s debemos hacer lo siguiente:

$$v = \frac{72km}{1h} = 72 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 72 \cdot \frac{1}{\frac{3600}{1000}} \frac{m}{s} = 72 \cdot \frac{1}{3,6} \frac{m}{s} = 20 \frac{m}{s}$$

es decir 72 km/h es equivalente a 20 m/s

Prefijos
Las unidades del sistema métrico utilizan los mismos prefijos para todas las cantidades. Un milésimo de gramo es un milígramo, y mil gramos son un kilógramo. Para usar eficientemente las unidades del SI, es importante conocer el significado de los prefijos de la tabla.

Factor	Prefijo	Símbolo
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ

Ejemplo:

6. 90 m/s se puede expresar como

A) 25 Km/h
B) 1500 Km/h
C) 900 Km/h
D) 360 Km/h
E) 324 Km/h

PROBLEMAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. De las siguientes magnitudes, la fundamental es

   A) Área
   B) Volumen
   C) Tiempo
   D) Rapidez
   E) Aceleración

2. La multiplicación de 1 kilómetro y un micrómetro es, en metros, equivalente a:

   A) 10^{3}
   B) 10^{-6}
   C) 1
   D) 10^{-3}
   E) 10^{-9}

3. Un volumen de $10m^3$, equivale a:

   A) $10^3 cm^3$
   B) $10^6 cm^3$
   C) $10^5 cm^3$
   D) $10^7 cm^3$
   E) $10^8 cm^3$

4. Sea X posición con dimensión L y t tiempo con dimensión T, la dimensión de k_1, en la siguiente ecuación es

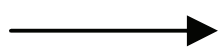
$$X = k + k_1 t + \frac{1}{2} k_2 t^2$$

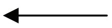
   A) T
   B) LT^{-1}
   C) L
   D) LT^{-2}
   E) LT

5. Se sabe que una fuerza se da en $Kg \cdot {}^{m}\!/_{s^2}$, si las dimensiones de longitud, masa y tiempo son respectivamente L, M, T. ¿Cuál es la dimensión de fuerza?

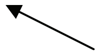
   A) M
   B) MLT^{2}
   C) ML
   D) MLT^{-2}
   E) MLT

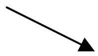
6. Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, de igual módulo (figura 6), entonces el vector $\vec{A}+\vec{B}$ es aproximadamente

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

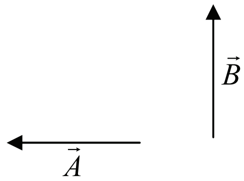


Fig. 6

7. La magnitud máxima de la sustracción de dos vectores, cuyas magnitudes son 6 y 8 respectivamente es

A) 2
B) 8
C) 10
D) 14
E) 48

8. Dados los vectores:

$\vec{A}$ de magnitud 8 en la dirección positiva del eje x.
$\vec{B}$ de magnitud 3 en la dirección negativa del eje x.
$\vec{C}$ de magnitud 15 en la dirección positiva del eje y.
$\vec{D}$ de magnitud 3 en la dirección negativa del eje y.

La magnitud de la suma de los vectores (vector resultante) es

A) 5
B) 10
C) 13
D) $\sqrt{5}$
E) $\sqrt{10}$

9. En la figura 7, $\vec{E}$ es el vector resultante de

A) $\vec{G}+\vec{D}$
B) $\vec{F}+\vec{C}+\vec{D}$
C) $\vec{G}-\vec{D}$
D) $\vec{F}-\vec{C}+\vec{D}$
E) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$

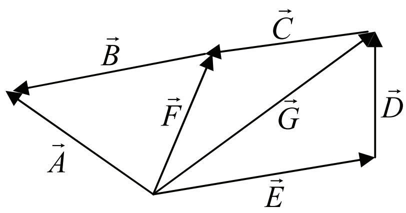


Fig. 7

10. En la figura 7, $\vec{A}$ es el vector resultante de

A) $\vec{E}+\vec{D}+\vec{C}+\vec{B}$
B) $\vec{F}-\vec{D}$
C) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$
D) $\vec{G}-\vec{D}$
E) $\vec{E}+\vec{F}+\vec{G}$

11. Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tienen igual módulo, entonces **siempre** se cumple que

I) $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{a}=2\vec{b}$
II) $\vec{a}-\vec{b}=0$
III) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\vec{a}$

De las afirmaciones, es (son) verdadera(s)

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Todas
E) Ninguna

12. En la figura 8, N es el punto medio del vector $\overrightarrow{TR}$. Entonces $\overrightarrow{SN}$ es igual a

A) $\vec{s}+\frac{\vec{r}}{2}$
B) $\frac{\vec{s}+\vec{r}}{2}$
C) $\vec{s}-\frac{\vec{r}}{2}$
D) $\frac{\vec{s}}{2}-\frac{\vec{r}}{2}$
E) $\vec{s}-\vec{r}$

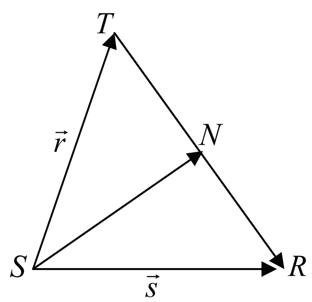


Fig. 8

13. De las siguientes afirmaciones:

I) Dos vectores iguales son paralelos.
II) Dos vectores paralelos pueden ser diferentes entre sí.
III) Dos vectores paralelos de sentido opuesto no son iguales.

Es (son) verdaderas(s)

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

14. En la figura 9, son resultantes de una adición de vectores

I) $\overrightarrow{AB}$
II) $\overrightarrow{CD}$
III) $\overrightarrow{EF}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

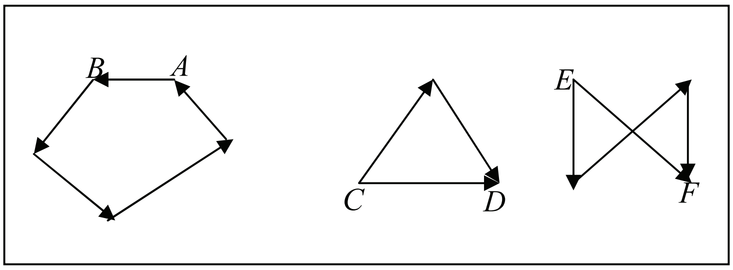


Fig. 9

15. En el cuadrilátero de la figura 10, se pueden establecer varias relaciones, **excepto** que

A) $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SR}$

B) $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{QT}$

C) $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{ST} - \overrightarrow{SR}$

D) $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{SQ}$

E) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{RQ}$

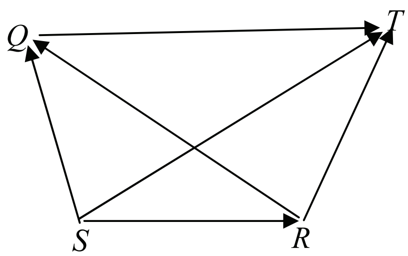


Fig. 10

16. Con respecto a los vectores representados en la figura 11 es correcto afirmar que

A) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$
B) $\vec{A} + \vec{D} = \vec{B} + \vec{C}$
C) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} = \vec{C}$
D) $\vec{A} + \vec{B} = -\vec{D} - \vec{C}$
E) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} + \vec{D}$

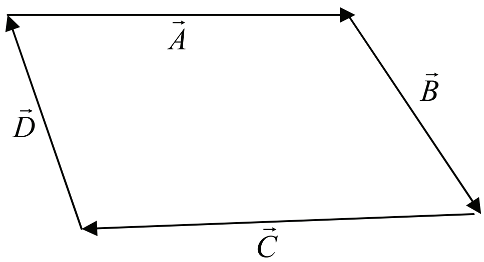


Fig. 11

17. La relación vectorial correcta existente entre los vectores representados en la figura 12 es

A) $\vec{Z} + \vec{U} = \vec{V}$
B) $\vec{V} + \vec{U} = \vec{Z}$
C) $\vec{Z} + \vec{V} = \vec{U}$
D) $\vec{V} + \vec{U} = -\vec{Z}$
E) $\vec{Z} + \vec{U} + \vec{V} = \vec{0}$

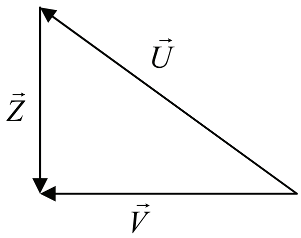


Fig. 12

18. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos entre si

I) el producto punto entre ellos es cero.
II) el producto cruz entre ellos es cero.
III) son iguales.

Es (son) siempre verdaderas (s)

A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

En las preguntas 19 y 20 escriba cada vector en términos de $\vec{a}$ y/o $\vec{b}$ de acuerdo a la figura 13 y 14 respectivamente

19.
A) $\overrightarrow{BA}$ =
B) $\overrightarrow{AC}$ =
C) $\overrightarrow{DB}$ =
D) $\overrightarrow{AD}$ =

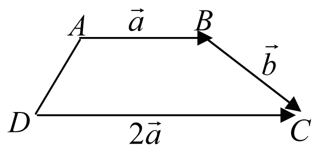


Fig. 13

20.
A) $\overrightarrow{ZX}$ =
B) $\overrightarrow{YW}$ =
C) $\overrightarrow{XY}$ =
D) $\overrightarrow{XZ}$ =

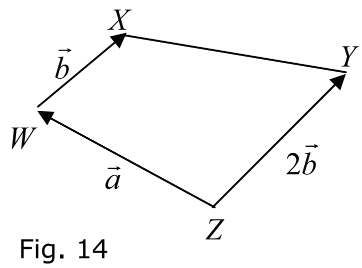


Fig. 14

<u>Solución ejemplo 1</u> **La alternativa correcta es D**

Para responder esta pregunta ver la tabla de la pagina 1

<u>Solución ejemplo 2</u> **La alternativa correcta es D**

La afirmación II es falsa, ya que el vector $\overrightarrow{QP}$ es el *opuesto* (sentido contrario) de $\overrightarrow{PQ}$

<u>Solución ejemplo 3</u> **La alternativa correcta es C**

En la figura 4 existe un triangulo rectángulo, entonces por trigonometría

$$\cos\alpha = \frac{A_X}{\left|\vec{A}\right|} \Rightarrow A_X = \left|\vec{A}\right| \cdot \cos\alpha$$

<u>Solución ejemplo 4</u> **La alternativa correcta es D**

Basta con aplicar el Teorema de Pitágoras

$\left|\vec{U} - \vec{V}\right| = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

<u>Solución ejemplo 5</u> **La alternativa correcta es D**

$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \Rightarrow 8 + 4K = 0 \Rightarrow K = -2$

<u>Solución ejemplo 6</u> **La alternativa correcta es E**

Para convertir de m /s a Km /h se debe multiplicar por 3,6
Para convertir de Km /h a m /s se debe dividir por 3,6

$$90 \cdot 3{,}6 = 324\, Km/h$$

DOFM-01

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web http://pedrodevaldivia.cl/

MATERIAL: FM-02

CINEMÁTICA I

La Cinemática estudia el **movimiento** de los cuerpos, sin preocuparse de las causas que lo generan. Por ejemplo, al analizar el desplazamiento de un automóvil, diremos que se mueve en línea recta, que su rapidez es de 60 km/h y que luego aumenta a 100 km/h, etc., pero no trata de explicar las causas de cada uno de estos hechos.
En esta unidad un cuerpo o móvil será tratado como una **partícula**, o sea, no interesan sus dimensiones, forma, masa, etc.

¿Cómo es el movimiento?

El movimiento de un cuerpo visto por un observador, depende del **punto de referencia** en el cuál se halla situado. Suponga que un avión que vuela horizontalmente deja caer una bomba. Si se observara la caída de la bomba desde el interior, observaría que cae en línea recta, verticalmente. Por otra parte, si se estuviera de pie sobre la superficie de la tierra observando la caída de la bomba, se advertiría que describe una curva llamada parábola. Como conclusión, el movimiento es **relativo**.

En la vida cotidiana, se encuentran varios ejemplos de esta dependencia del movimiento en relación con el punto de referencia. Analicemos el caso de un observador (A) sentado en una locomotora en movimiento hacia el este y otro (B) de pie en tierra, los cuales observan una lámpara fijada en el techo de la cabina. Para el observador B la lámpara se encuentra en movimiento. Por otra parte, para el observador A sentado en la locomotora, la lámpara esta en reposo y B se desplaza en sentido contrario al movimiento del vehículo. En otras palabras, A se desplaza hacia la derecha con respecto al observador B, y B lo hace hacia la izquierda en relación con el observador A.

El problema surge en la elección de ejes coordenados que estén en reposo absoluto, a los cuales referir todos los movimientos. Esto, en realidad, es imposible, ya que no disponemos de ningún punto de referencia que sea inmóvil. En nuestro estudio que veremos a continuación, consideraremos ejes coordenados ligados a tierra, porque, generalmente estamos acostumbrados a considerar el movimiento de los cuerpos suponiendo la Tierra en reposo (por convención).

Ejemplo 1

Un bote con dirección al norte cruza un río con una velocidad de 8 km/h con respecto al agua. El río corre a una velocidad de 6 km/h hacia el este, con respecto a la tierra. Determine la magnitud de la velocidad con respecto a un observador estacionado a la orilla del río.

A) 14 km/h
B) 10 km/h
C) 8 km/h
D) 6 km/h
E) 2 km/h

Conceptos

i) Trayectoria: es la línea que une las distintas posiciones por las cuales pasa un móvil. Se puede clasificar en rectilínea y curvilínea.

ii) Distancia y desplazamiento: en el lenguaje cotidiano, estos conceptos suelen ser usados como sinónimos, lo cual es errado.
La distancia es la longitud de su trayectoria y se trata de una magnitud **escalar.**
El desplazamiento es la unión de la posición inicial (A) y final (B) de la trayectoria, y es una magnitud **vectorial.**

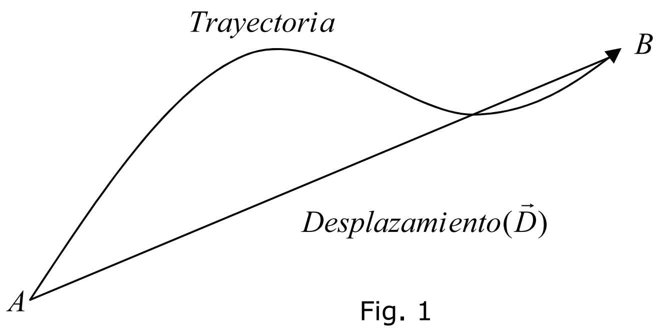


Fig. 1

Nota: Si la trayectoria es rectilínea, el desplazamiento puede ser negativo o positivo, según el sentido de movimiento de la partícula. **La distancia recorrida siempre será mayor o igual que la magnitud del desplazamiento** (valen lo mismo cuando el movimiento entre dos posiciones es rectilíneo y siempre que no exista regreso al punto de partida).

iii) Rapidez y velocidad: son dos magnitudes que suelen confundirse con frecuencia.

La rapidez es una magnitud escalar que relaciona la distancia recorrida con el tiempo.

La velocidad es una magnitud vectorial que relaciona el cambio de posición (o desplazamiento) con el tiempo.

¿Qué significa una velocidad negativa?

El signo de la velocidad esta relacionado con el sentido de movimiento en general se toma como lo muestra la figura, pero no tiene que ser necesariamente así, perfectamente válido sería tomarlo positivo hacia la izquierda.

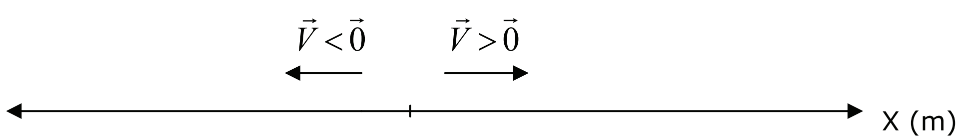


Fig. 2

Por lo tanto, cuidado con decir que una velocidad de $-12\,{}^{km}\!/_{h}$ es menor que una velocidad de $6\,{}^{km}\!/_{h}$, ya que, el signo sólo esta mostrando un sentido de movimiento contrario.

iv) Rapidez media (V_M): es la relación entre la distancia total recorrida y el tiempo que tarda en recorrerla.

$$V_M = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$ o también $$V_M = \frac{d_{total}}{t_{total}}$$

Recuerde que la dimensión de rapidez es la relación entre longitud con un intervalo de tiempo.

v) Velocidad media ($\vec{V}_M$): relaciona el desplazamiento total y el tiempo que tarda en hacerlo.

$$\vec{V}_M = \frac{\Delta \vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}_{final} - \vec{d}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$ o también $$\vec{V}_M = \frac{\vec{D}_{total}}{t_{total}}$$

vi) Velocidad instantánea ($\vec{V}(t)$): un cuerpo no siempre puede viajar con velocidad constante, por esta razón es útil hablar de este concepto, el cual corresponde a la velocidad que posee el móvil en un determinado instante de su recorrido. En este capítulo nos ocuparemos del movimiento en trayectorias rectilíneas, o sea, que la magnitud de la rapidez y velocidad son las mismas en cada instante. Sin embargo, es un buen hábito reservar el término velocidad para la descripción mas completa del movimiento. Una forma matemática de calcular esta velocidad, se mostrará más adelante cuando se analicen los tipos de movimientos.

vii) Aceleración ($\vec{a}$): el concepto de aceleración siempre se relaciona con un cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_{final} - \vec{V}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$

Ejemplo 2

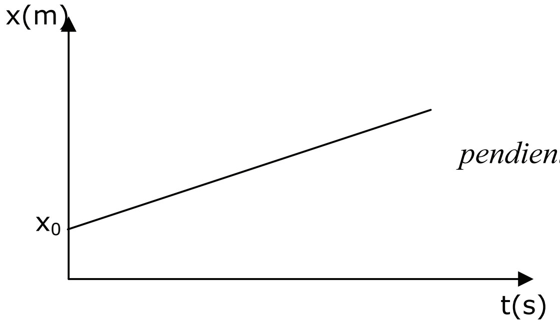
La rapidez media de un automóvil que viaja en línea recta, en la primera mitad del viaje es de 20 km/h y en la segunda mitad es de 30 km/h.

¿Cuál es la rapidez media para todo el viaje?

A) 28 km/h
B) 26 km/h
C) 25 km/h
D) 24 km/h
E) Faltan datos.

Tipos de movimientos

i) Movimiento rectilíneo uniforme (MRU): cuando un cuerpo se desplaza con rapidez constante a lo largo de una trayectoria rectilínea, se dice que describe un MRU.
Como ejemplo supongamos que un automóvil se desplaza por una carretera recta y plana, y su velocímetro siempre indica una rapidez de $60 \, {}^{km}\!/_{h}$, lo cual significa que: en 1 h el auto recorrerá 60 km, en 2 h recorrerá 120 km, en 3 h recorrerá 180 km. Si estos datos los llevamos a un gráfico de posición v/s tiempo, su comportamiento sería el siguiente:



$$pendiente = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = velocidad(\vec{v})$$

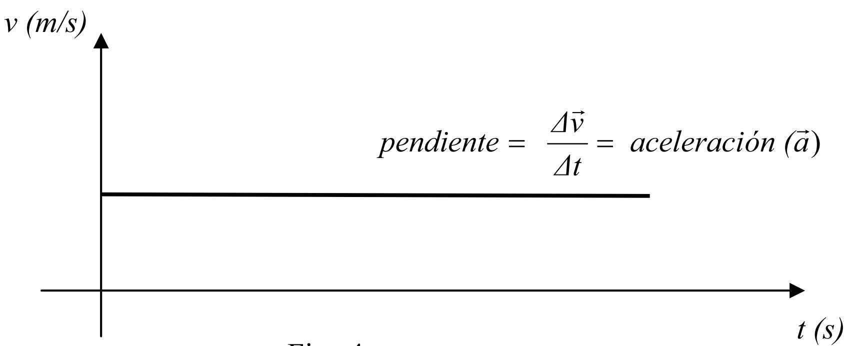
Fig.3

La ecuación de la recta nos permitirá encontrar la información de cada posición de la partícula en el tiempo. Esta ecuación se denomina ecuación de itinerario.

Nota: la velocidad es constante, ya que la pendiente es única. El signo de la velocidad se debe respetar para el cálculo de desplazamientos.

$$\boxed{x(t) = x_0 + v \cdot t}$$

x_0 = posición inicial
Si x_0 = 0 (m), tenemos $x(t) = v \cdot t$, conocida como la expresión $d = v \cdot t$
A continuación se mostrarán los comportamientos gráficos de la velocidad y aceleración en el tiempo:



$$pendiente = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \ aceleración\ (\vec{a})$$

Fig. 4

Como la velocidad es constante, implica que la aceleración en un MRU **siempre** es cero

Fig. 5

ii) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: el movimiento con aceleración más sencillo, es el rectilíneo, en el cual la velocidad cambia a razón constante, lo que implica una aceleración constante en el tiempo.

Nota: Cuando el vector velocidad y aceleración tienen distinto sentido e igual dirección, el móvil disminuye su rapidez en el tiempo se dice que es un movimiento retardado.

Imaginemos un móvil estacionado en una posición x_0 a la derecha del origen (posición 0(m)), él comienza a moverse en línea recta, alejándose del origen aumentando su velocidad proporcional con el tiempo, lo cual implica que su aceleración es constante. La situación anterior representa un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, lo cual será analizado gráficamente:

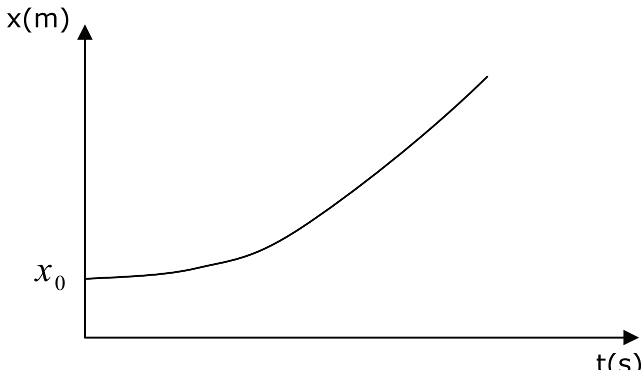


Fig. 6

La **ecuación de itinerario** generalizada esta representada por:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

El comportamiento de la velocidad y aceleración en función del tiempo es el siguiente:

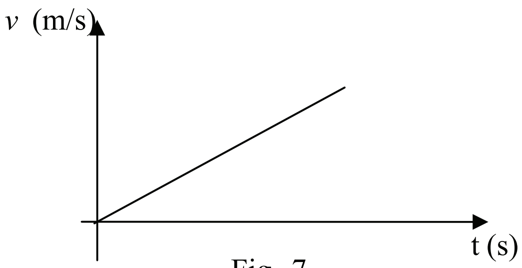


Fig. 7

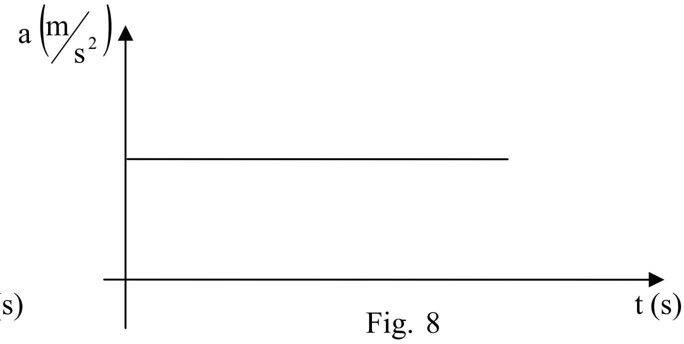


Fig. 8

De acuerdo a la figura 7, podemos determinar la velocidad instantánea que posee el móvil, encontrando la ecuación de la recta:

$$\boxed{v(t) = a \cdot t}$$

El gráfico de la figura 8 muestra la aceleración que se obtiene del gráfico de la figura 7.
En la expresión generalizada para la velocidad instantánea hay que tener en cuenta la velocidad inicial v_0:

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t}$$

Las ecuaciones anteriores sirven para movimientos uniformemente acelerados, sólo hay que poner cuidado con el signo de velocidades y aceleraciones.

¿Qué indica el área bajo la curva en un gráfico?

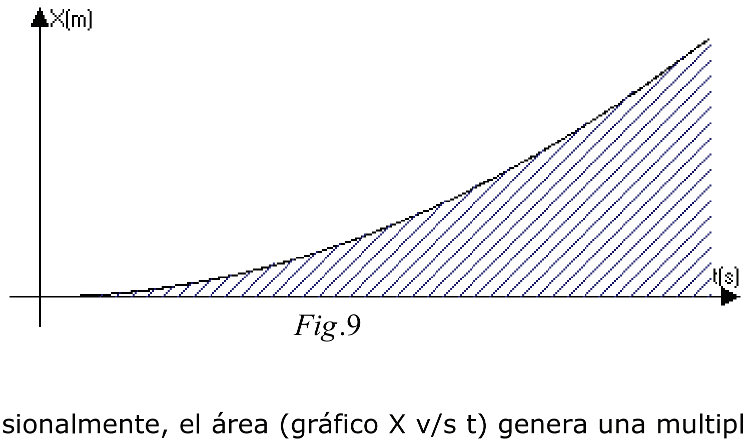
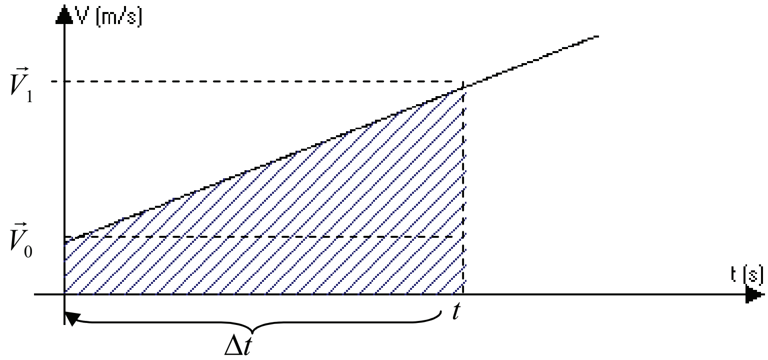


Fig.9

Analizando dimensionalmente, el área (gráfico X v/s t) genera una multiplicación de posición y tiempo, lo cual en cinemática no implica ningún concepto físico.



$Fig.10$

El calculo del área (grafico V v/s t) genera una multiplicación de velocidad y tiempo, con lo cuál podemos obtener la distancia recorrida en un intervalo de tiempo determinado, para el cuál hay que tomar el valor absoluto del área a calcular. También se puede obtener desplazamiento total teniendo en cuenta el signo.

Con el grafico de la figura 10, podemos demostrar la ecuación de itinerario de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, para la cual tomaremos como posición inicial el origen ($x_0 = 0m$). Calculando el área (trapecio) en intervalo de tiempo Δt tenemos:

$$Area = Area_{rectangulo} + Area_{triangulo} = Area_{trapecio}$$

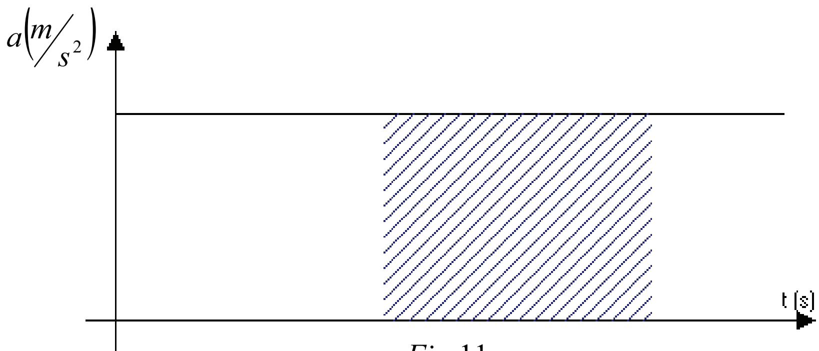
en la cual se obtiene lo siguiente:

$$Area = \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_0\right) \cdot t$$

Utilizando un recurso matemático, multiplicaremos por el neutro multiplicativo la expresión del área del triangulo:

$$Area = \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_0\right) \cdot t \cdot \underbrace{\left(\frac{t}{t}\right)}_{1}$$

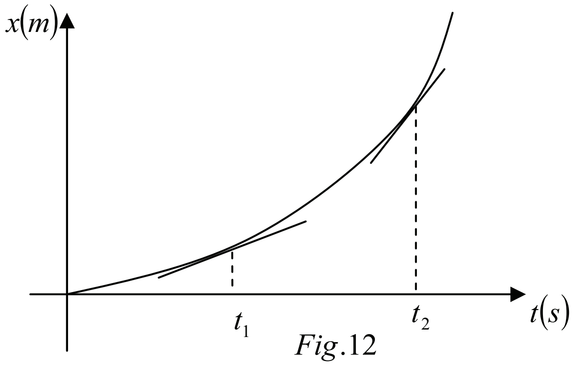
$$Area = X(t) = \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_0\right)}{t} \cdot t^2 \Rightarrow \qquad \boxed{X(t) = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$



$Fig.11$

El cálculo del área genera una multiplicación entre aceleración y tiempo, con lo cual se puede obtener la variación de velocidad (respetando los signos).

¿Como analizar la velocidad instantánea en un gráfico x v/s t?



$Fig.12$

Las pendientes de las rectas tangentes en t_1 y t_2, es un indicador de la velocidad instantánea en los respectivos instantes de tiempo. Con esto logramos verificar que la rapidez de la partícula va aumentando en el sentido positivo. Con esta técnica podemos analizar un problema desde el punto de vista cualitativo.

Ejemplo 3

Dos móviles moviéndose en trayectorias rectilíneas perpendiculares con rapideces constantes, uno a 36 km/h y el otro a 72 km/h, se cruzan prácticamente en el mismo punto sin chocar. Después de 10 s de haberse cruzado, la distancia que los separa es de

A) 108 m
B) 200 m
C) 300 m
D) 100 $\sqrt{3}$ m
E) 100 $\sqrt{5}$ m

Ejemplo 4

De acuerdo al gráfico de la figura 13, para este movimiento rectilíneo se afirma que:

I) entre C y D el movimiento es más rápido que entre A y B.
II) a los 8 s el móvil se encuentra detenido.
III) entre E y F la rapidez es la misma que entre G y H.

Es (son) correcta (s)

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

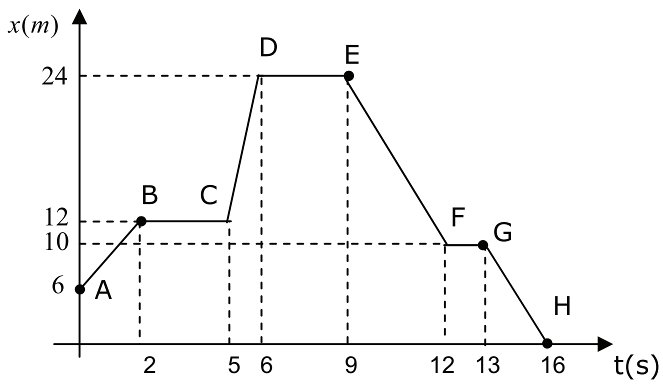
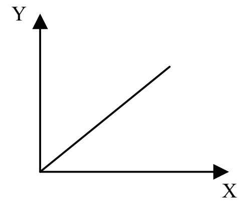


Fig. 13

A continuación veremos los distintos tipos de proporcionalidad que se dan en las ecuaciones que se ven en las ciencias físicas, es de mucha ayuda para la comprensión de los conceptos entender cómo se relacionan las variables.

Proporcionalidad Directa

Si dos variables, x e y, cumplen que $\frac{y}{x} = k$ donde k es una constante, entonces se dice que x e y son directamente proporcionales y al graficar los distintos valores que toman estas variables se obtiene el siguiente gráfico:



Es decir una línea recta que pasa por el origen. Se observa que a medida que crece la variable **x** también aumenta la variable **y** en la misma medida.

Un ejemplo de esto en física es:

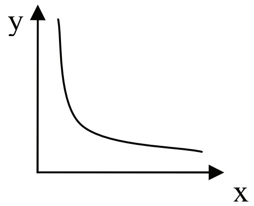
Cuando se aplican distintas fuerzas sobre una misma masa la relación entre estas variables es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

si m es constante la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales, por ejemplo si se duplica la fuerza entonces también se duplica la aceleración.

Proporcionalidad Inversa

En este caso las variables cumplen que $y \cdot x = k$, con *k* constante y se dice que x e y son inversamente proporcionales, al graficar los distintos valores que toman estas variables se tiene el siguiente gráfico:



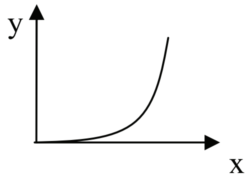
Se observa que si una variable aumenta la otra disminuye o viceversa, la curva corresponde a una hipérbola.

Un ejemplo de esto en física es:

Un móvil que debe recorrer una misma distancia (d) con rapideces distintas (v) usamos la relación $d = v \cdot t$, donde d es constante y la rapidez es inversamente proporcional al tiempo. Como la distancia es constante cuando el móvil recorra con una velocidad mayor entonces la otra variable que es el tiempo disminuirá.

Proporcionalidad al Cuadrado

Aquí una de las variables esta elevada al cuadrado y la relación entre estas variables puede ser de la forma $y = ax^2$ donde, a es constante, en este caso decimos que y es proporcional al cuadrado de x otra forma de decirlo es que y es directamente proporcional al cuadrado de x. Cuando estamos en esta situación la figura que se obtiene al graficar los valores que toman las variables x e y es:



La curva corresponde a una parábola, cuando una de las variables se duplica (x) la otra se cuadruplica (y)

Un ejemplo de esto en física es:

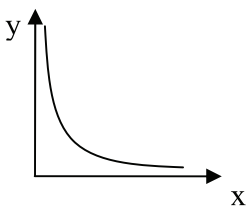
La relación entre la energía cinética (E_c) y la velocidad (v) es una proporcionalidad de este tipo siendo la ecuación que las relaciona la siguiente:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

donde 1/2m es constante. En esta expresión si la velocidad se duplica entonces la energía cinética se cuadruplica, o si v disminuye a la mitad entonces E_c disminuye a la cuarta parte, etc.

Proporcionalidad Inversa al Cuadrado

Esta situación se da cuando la relación entre las variables es de la forma $y = \frac{k}{x^2}$ donde k es constante, se dice que y es inversamente proporcional al cuadrado de x. Si se tienen distintos valores de x e y al graficarlos obtendremos lo siguiente:



Aquí también como en el caso de la proporcionalidad inversa si una de las variables crece la otra disminuye pero como una de las variables esta elevada al cuadrado, la variable **x**, si esta crece al doble por ejemplo la variable **y** disminuye a la cuarta parte.

Un ejemplo de esto en física es:

La famosa Ley de la Gravitación Universal donde se muestra la forma en que se atraen dos masas. Por ejemplo la atracción entre la Tierra (m_1) y el Sol (m_2), la relación es la siguiente:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

donde el producto Gm_1m_2 es constante. Si la distancia entre ambos cuerpos celestes fuese la mitad de la actual entonces la fuerza de atracción entre ambos sería 4 veces mayor de lo que es ahora.

PROBLEMAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. Si un móvil viaja con rapidez constante de 36 Km/h durante 1,5 minutos, entonces en este lapso recorre

   A) 36 m
   B) 45 m
   C) 54 m
   D) 90 m
   E) 900 m

2. El módulo del vector desplazamiento coincide con la distancia recorrida de un punto P a un punto Q cuando la trayectoria es igual

   A) a una semicircunferencia de diámetro $\overline{PQ}$.
   B) al segmento rectilíneo $\overline{PQ}$.
   C) a cualquier curva que tenga por extremos P y Q.
   D) Todas las anteriores.
   E) Ninguna de las anteriores.

3. En la figura 14, el vector desplazamiento entre A y B es

   A) igual al vector desplazamiento entre B y A.
   B) de mayor módulo que el desplazamiento entre B y A.
   C) de menor módulo que el desplazamiento entre B y A.
   D) igual a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
   E) igual a $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

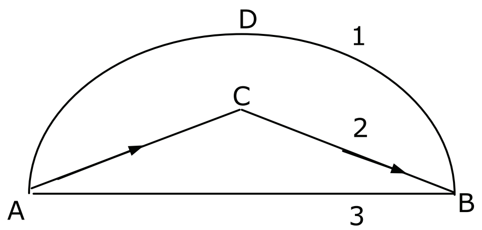


Fig. 14

4. El perímetro de una circunferencia está dado por la relación $p = 2\pi \cdot r$, luego el gráfico de perímetro p versus el radio r que mejor representa esta relación es

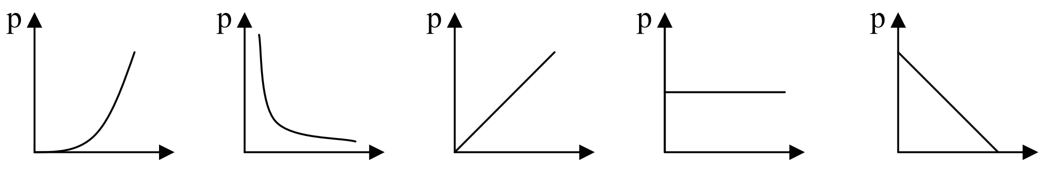


Fig. 15

A) B) C) D) E)

5. Si un auto gasta B litros de bencina en recorrer K kilómetros entonces los litros de bencina que necesita para recorrer L kilómetros es

A) BK / L
B) BL / K
C) BKL
D) KL/B
E) L/BK

6. Un tren de pasajeros parte desde una estación en el mismo instante en que por una vía lateral pasa un tren de carga moviéndose con rapidez constante y en un sentido opuesto. El gráfico de la figura 16 muestra la rapidez en función del tiempo para ambos trenes. ¿Cuánto demora el tren de pasajeros en alcanzar la rapidez con que se mueve el tren de carga?

A) 20 s
B) 30 s
C) 40 s
D) 50 s
E) 60 s

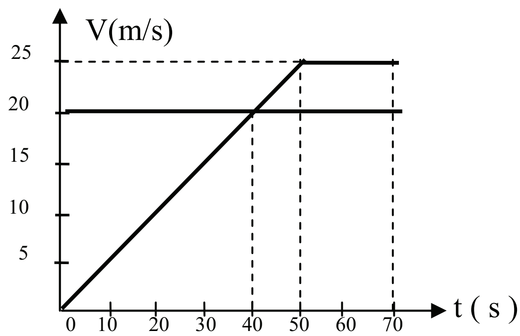


Fig.16

7. Dos automóviles A y B deben recorrer una misma distancia D con movimiento uniformemente acelerado, partiendo ambos del reposo. Si A demora la mitad del tiempo que demora B, la razón entre las aceleraciones respectivas entre A y B es

A) 4 : 1
B) 2 : 1
C) 1 : 2
D) 1 : 4
E) 2 : 3

8. De acuerdo al gráfico de la figura 17; ¿a qué distancia del origen se encuentra el móvil en el instante t = 5 s?

A) 5 m
B) 10 m
C) 25 m
D) 35 m
E) 45 m

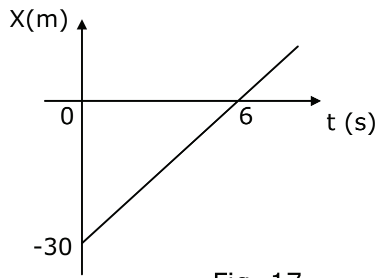


Fig. 17

9. Un automovilista hace un determinado viaje en 2 horas, llevando una rapidez media de 60 Km/h. Si hiciese el mismo trayecto con una rapidez media de 90 km/h. ¿Cuánto tiempo ahorraría?

   A) 15 min
   B) 20 min
   C) 80 min
   D) 40 min
   E) 120 min

10. Dos móviles A y B parten del mismo punto y se mueven en el mismo sentido a lo largo de la misma recta. De acuerdo con esta información, se puede asegurar que en el instante t_C

    A) A y B tienen la misma aceleración.
    B) la aceleración de B es mayor que la de A.
    C) A y B tienen la misma rapidez.
    D) la rapidez de A es mayor que la de B.
    E) la rapidez de B es mayor que la de A.

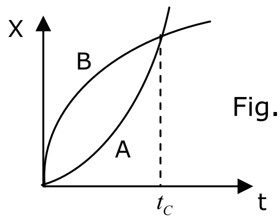


Fig.18

11. La figura 19, representa la posición en función del tiempo para un ciclista. La rapidez media con que el ciclista recorrió los primeros 160 m fue aproximadamente de

    A) 2,2 m/s
    B) 8 m/s
    C) 10,7 m/s
    D) 28,8 m/s
    E) 80 m/s

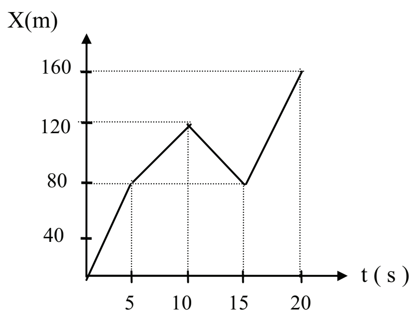


Fig.19

12. La figura 20, muestra los itinerarios del movimiento rectilíneo de los móviles I, II y III. Basándose en el gráfico ¿cuál (es) tiene (n) rapidez cero en t=0 h?

    A) Sólo I
    B) Sólo II
    C) Sólo III
    D) Sólo I y II
    E) I, II y III

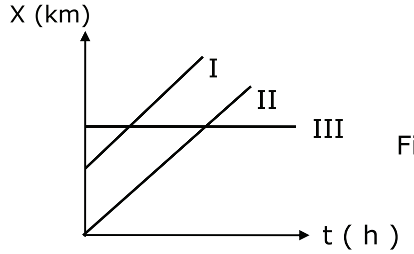


Fig.20

13. Con respecto al gráfico de la figura 21, se afirma que

I) a los 3,5 s la rapidez es de 10 m/s.
II) entre E y F la rapidez disminuye.
III) la rapidez media para todo el movimiento es 3 m/s.

De estas afirmaciones es (son) **falsa**(s)

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna

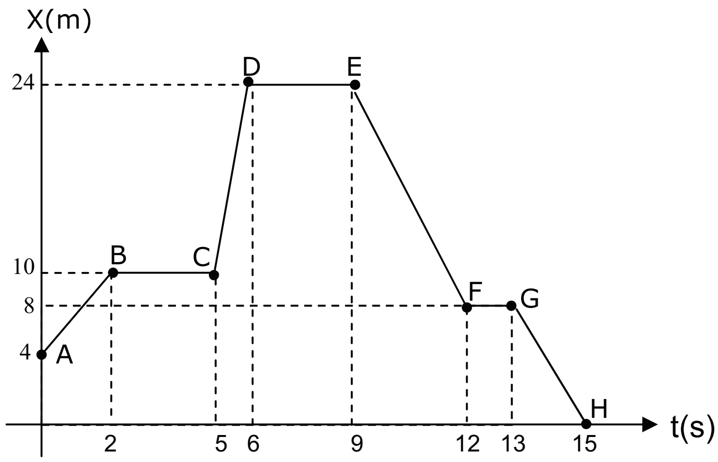


Fig. 21

14. En el gráfico de la figura 22, de las afirmaciones:

I) La distancia recorrida con M.U.R es 300 m.
II) Entre los 20 s y los 30 s, el móvil viene de "regreso".
III) Entre t = 10 s y t = 20 s la rapidez media del móvil fue de 65 m/s.

Es (son) **falsa** (s)

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

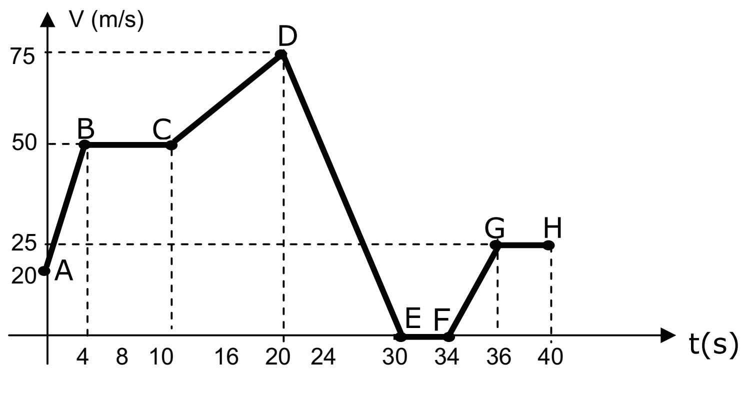


Fig. 22

15. Una partícula parte del reposo acelerando a razón de 4 m/s^2 durante 8 s, luego continúa moviéndose con rapidez constante durante 6 s y finalmente, comienza a frenar, hasta detenerse al cabo de 5 s. Desde que parte hasta que se detiene ¿qué distancia recorrió la partícula?

A) 400 m
B) 500 m
C) 800 m
D) 1200 m
E) 4000 m

16. El siguiente gráfico V v/s t corresponde al de una partícula que se mueve en línea recta. ¿Cuál será la velocidad inicial V_0 del movimiento, si al cabo de 5s, la partícula se encuentra a 75m del punto de partida ($X_0 = 0m$)?

A) 5 m/s
B) 10 m/s
C) 20 m/s
D) 25 m/s
E) Ninguna de las anteriores.

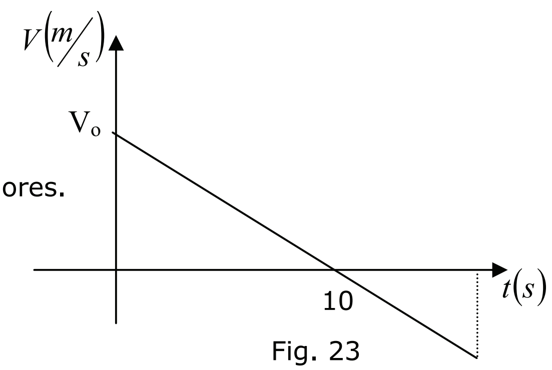


Fig. 23

17. Si un móvil se desplaza en línea recta, con aceleración constante de 2 m/s^2, alcanzando una rapidez de 108 km/h al cabo de 5s , entonces la velocidad que tenía este móvil en t = 0 s era igual a

A) 0 m/s
B) 5 m/s
C) 10 m/s
D) 20 m/s
E) Ninguna de las anteriores

18. Un vehículo que viajaba con una rapidez inicial v, comienza a frenar de tal modo que la desaceleración fue constante. Si desde que comienza a frenar hasta que se detiene, el vehículo empleó un tiempo t, ¿cuál de las siguientes aseveraciones es correcta para el intervalo de tiempo t?

A) la rapidez media fue vt.
B) la rapidez media fue (vt)^2.
C) la aceleración fue −v/2.
D) la distancia recorrida fue (vt)/2.
E) la distancia recorrida fue (vt^2)/2.

19. De acuerdo a la figura 24, el cual representa la V v/s t de un movimiento rectilíneo, se afirma que:

I) La aceleración entre F y G es positiva.
II) El móvil estuvo en reposo durante 4 s.
III) La aceleración entre los 10 s y 20 s es de 2,5 m/s^2.

De estas afirmaciones es (son) verdadera (s)

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

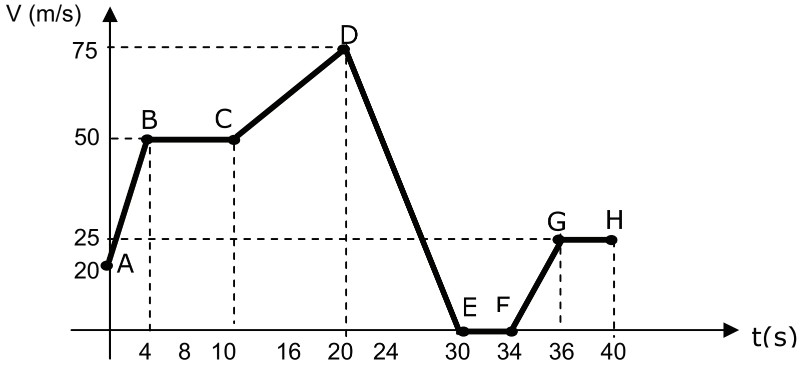


Fig. 24

20. De la observación del siguiente gráfico se pueden extraer varias conclusiones. Una de ellas es que, si los móviles P y Q parten del mismo lugar

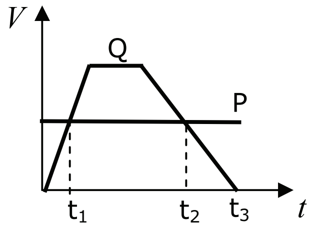


Fig. 25

A) hasta t_3 ambos recorrieron la misma distancia.
B) en t_1 ambos se encuentran.
C) en t_2 ambos están detenidos.
D) en t_1 ambos tienen la misma rapidez pero P va adelante.
E) entre t_2 y t_3 Q se devuelve.

21. Una partícula desarrolla un movimiento variado, según el gráfico V versus t de la figura 26. La partícula desde t = 0 s hasta t = 4 s ha recorrido una distancia de

A) 6 m
B) 8 m
C) 14 m
D) 20 m
E) 23 m

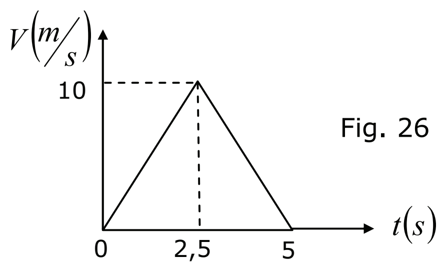


Fig. 26

22. ¿Cuál es la velocidad del móvil del gráfico V v/s t, en el instante t = 6 s?

A) 1 m/s

B) 1,5 m/s

C) 2 m/s

D) 2,5 m/s

E) 3 m/s

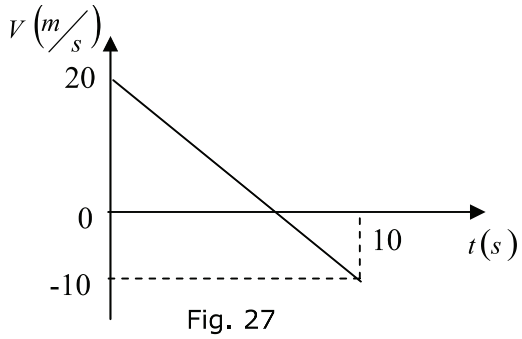


Fig. 27

23. La velocidad media de un móvil que recorre 100 m en línea recta, es 35 m/s. Si su aceleración es constante e igual a 0,7 m/s^2, entonces la velocidad de partida es igual a

A) 30 m/s

B) 33 m/s

C) 34 m/s

D) 36 m/s

E) 37 m/s

24. Un automóvil se mueve a 48 km/h en línea recta. Repentinamente se aplican los frenos y se detiene luego de recorrer 2 m. Si se hubiera estado moviendo a 96 km/h y se aplicaran los frenos como en el caso anterior, de manera que, se obtuviese la misma desaceleración, ¿cuál sería la distancia que recorrería desde el momento que se aplican los frenos hasta que se detiene?

A) 4 m
B) 6 m
C) 8 m
D) 10 m
E) 12 m

25. El gráfico aceleración v/s tiempo, corresponde al de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, tal que en t = 0 s, su velocidad es v_0 = 10 m/s. ¿Qué rapidez tendrá la partícula en el instante t = 6 s?

A) 10 m/s

B) 18 m/s

C) 36 m/s

D) 46 m/s

E) Ninguna de las anteriores.

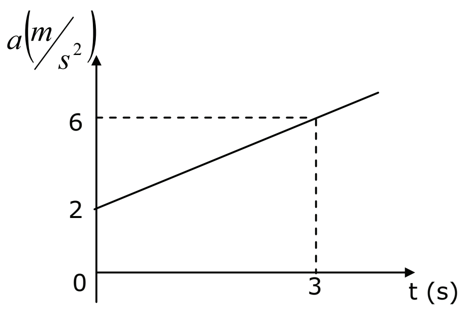
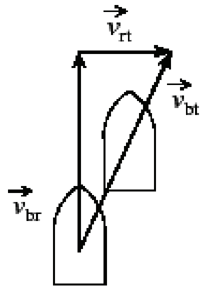
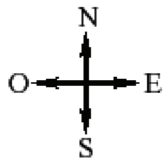


Fig. 28

Solución ejemplo 1





$\vec{V}_{br}$ = velocidad del bote respecto al río.

$\vec{V}_{rt}$ = velocidad del río respecto de la tierra.

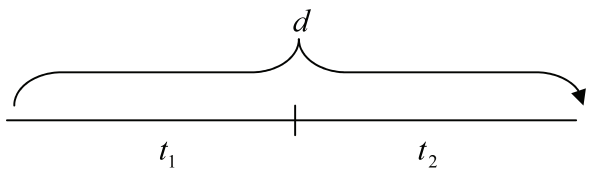
$\vec{V}_{bt}$ = velocidad del bote respecto de la tierra (incógnita)

Para la solución del problema basta manejar la suma vectorial, ya que la velocidad del bote con respecto a tierra es la suma de $\vec{V}_{br} + \vec{V}_{rt}$.
Como tenemos dos vectores perpendiculares entre sí, basta aplicar Pitágoras para encontrar la magnitud de la resultante.

$$\left|\vec{V}_{bt}\right| = \sqrt{\left(\vec{V}_{br}\right)^2 + \left(\vec{V}_{rt}\right)^2} = 10\, {}^{Km}\!/_{h}$$

La alternativa correcta es B

Solución ejemplo 2



Analizando los tiempos en cada tramo $t_1 = \frac{d/2}{20}$ y $t_2 = \frac{d/2}{30}$. Si pensamos la rapidez media de todo el viaje estará dada por el cuociente entre la distancia total (d) y el tiempo total (t_1+t_2).

$$t_{total} = \frac{d/2}{20} + \frac{d/2}{30} = \frac{d}{40} + \frac{d}{60}$$

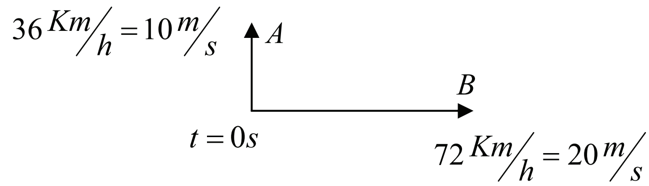
Finalmente

$$V_M = \frac{d}{d/40 + d/60} = \frac{1}{100/2400}\, 24\, {}^{Km}\!/_{h}$$

Nota: cuidado en este tipo de problemas con sacar el promedio, no es lo mismo, ya que son rapideces medias distintas en el viaje.

La alternativa correcta es D

Solución ejemplo 3



Transcurridos 10s los desplazamientos de A y B son los siguientes

$$\vec{d}_A = 100m \text{ en la vertical}$$

$$\vec{d}_B = 200m \text{ en la horizontal}$$

Como los desplazamientos son perpendiculares, para encontrar la distancia que los separa debemos aplicar el teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{100^2 + 200^2} = 100\sqrt{5}m$$

La alternativa correcta es E

Solución ejemplo 4

La afirmación I es verdadera. Para analizar las velocidades basta calcular las pendientes de las rectas respectivas

$$V_{CD} = 12\,m/s \text{ y } V_{AB} = 3\,m/s$$

La afirmación II es verdadera. Entre 6 s y 9 s el móvil se mantuvo detenido en la posición 24 m.

La afirmación III es falsa. Las pendientes (en magnitud, ya que son rapideces) respectivas son

$$V_{EF} = \frac{14}{3}\,m/s \text{ y } V_{GH} = \frac{10}{3}\,m/s$$

La alternativa correcta es B

DOFM-02

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web http://pedrodevaldivia.cl/

MATERIAL: FM-03

CINEMÁTICA II

CAIDA LIBRE

En cinemática, la **caída libre** es un movimiento dónde solamente influye la gravedad. En este movimiento se desprecia el rozamiento del cuerpo con el aire, es decir, se estudia en el vacío. El movimiento de la caída libre es un **movimiento uniformemente acelerado**. Según Galileo Galilei (1564 – 1642), la aceleración instantánea es independiente de la masa del cuerpo, es decir, si soltamos un coche y una pulga, ambos cuerpos tendrán la misma aceleración, que coincide con la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$). Esto último implica que, si dejamos caer (en $t = 0s$) cuerpos de diferentes masas desde la misma altura, llegarán al suelo con la misma velocidad y en el mismo instante de tiempo.

Antes de analizar las ecuaciones, es conveniente hacer algunos comentarios generales. En problemas que tratan con cuerpos en caída libre y lanzamientos verticales, es demasiado importante elegir un sentido positivo y seguir este criterio en forma consistente al sustituir los valores conocidos. El signo de la respuesta es necesario para determinar desplazamiento y velocidad en tiempos específicos, no así cuando se desea determinar distancia recorrida y rapidez, ya que en ese caso tomamos el módulo (magnitud) del resultado. Si el sentido ascendente se elige como positivo, un valor positivo para $X(t)$ indica un desplazamiento por arriba del punto de partida; si $X(t)$ es negativo, representa un desplazamiento por debajo el punto de partida. En forma similar los signos de V_0 (velocidad inicial) y las velocidades instantáneas $V(t)$. La figura 1 muestra el comportamiento de un cuerpo en caída libre.

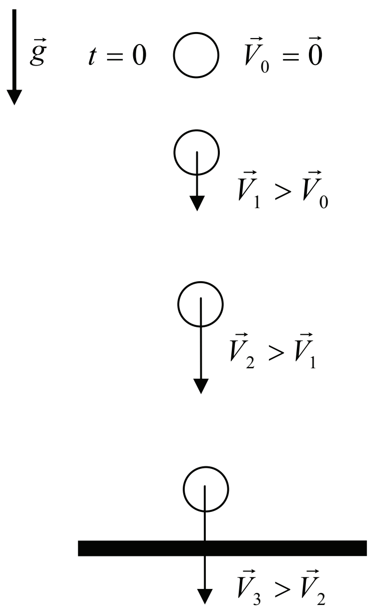


Fig.1

Por simplicidad en los cálculos, se tomará $X_0 = 0m$

$$
\boxed{\begin{aligned} X(t) &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ V(t) &= -g \cdot t \\ a(t) &= -g = cte \end{aligned}}
$$

Nota: En este caso la dirección ascendente fue tomada como positiva

LANZAMIENTOS VERTICALES

El **lanzamiento vertical hacia abajo** es similar a la caída libre (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), con la diferencia que la velocidad inicial es diferente de cero ($\vec{V}_0 \neq \vec{0}$).

El **lanzamiento vertical hacia arriba**, es un movimiento rectilíneo uniformemente retardado.

Si tomamos positivo hacia arriba, las ecuaciones que rigen a estos movimientos son las siguientes:

$$X(t) = \pm V_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
$$V(t) = \pm V_0 - g \cdot t$$
$$a(t) = -g = cte$$

Nota: recuerda $\vec{V}_0 > \vec{0}$ (hacia arriba); $\vec{V}_0 < \vec{0}$ (hacia abajo), todo esto para el cálculo de desplazamiento y velocidad instantánea. En el caso que se requiera distancia recorrida o rapidez instantánea, debes tomar la magnitud del resultado.

Para la mayoría de los ejercicios se usará $|\vec{g}| \approx 10 \, m/s^2$.

Análisis del movimiento de ida y vuelta:

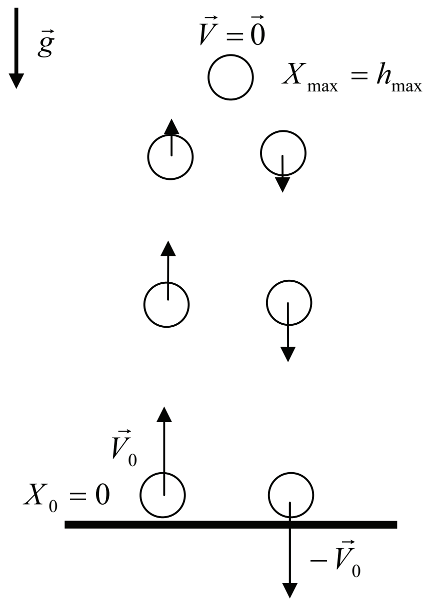


Fig.2

Al observar la figura 2, existe una simetría en el movimiento, lo que implica que el tiempo de ida y vuelta son los mismos; la distancia total recorrida, equivale al doble de la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

Importante destacar que la aceleración siempre está actuando, y en la altura máxima sólo se anula la velocidad instantánea.

Las expresiones que se dan a continuación nos permiten calcular el tiempo de subida y la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

$$t_{subida} = \frac{V_0}{g} \qquad h_{\max} = \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g}$$

En las expresiones anteriores se muestra que, en estos movimientos, la masa del cuerpo es indiferente. El tiempo de subida es proporcional con la velocidad inicial, y la altura máxima es proporcional con la velocidad inicial al cuadrado.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, se pueden demostrar utilizando las ecuaciones del lanzamiento vertical hacia arriba.
Sabemos que la velocidad instantánea en la altura máxima es cero, con lo cual podemos obtener el tiempo de subida:

$$V(t_{subida}) = 0 \Rightarrow V_0 - g \cdot t_{subida} = 0$$

despejando tenemos lo siguiente

$$\boxed{t_{subida} = \frac{V_0}{g}}$$

Reemplazando el tiempo de subida en la ecuación de posición, obtenemos la altura máxima

$$X(t_{subida}) = V_0 \cdot t_{subida} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_{subida})^2 \Rightarrow h_{\max} = \frac{(V_0)^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(V_0)^2}{g} \right)$$

restando, tenemos

$$\boxed{h_{\max} = \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g}}$$

Análisis gráfico del movimiento de ida y vuelta

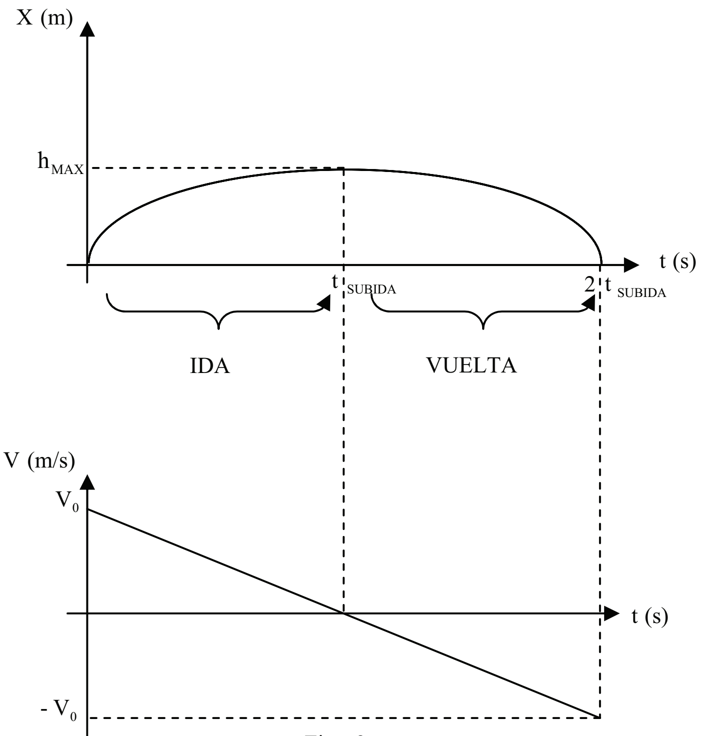


Fig. 3

La aceleración es constante y siempre esta dirigida hacia abajo

Fig.4

Análisis cualitativo del lanzamiento de proyectiles

El caso más general se presenta cuando el proyectil se lanza con cierto ángulo con respecto a la horizontal. Este movimiento se caracteriza por ser compuesto, ya que cuando el proyectil va de subida posee un movimiento retardado en la vertical y un MRU en la horizontal; y cuando el proyectil va de bajada, posee un movimiento acelerado en la vertical y un MRU en la horizontal.
Cuando el proyectil alcanza la altura máxima, la componente de la velocidad en la vertical se anula, quedando sólo la componente en la horizontal (en ese punto el vector velocidad y aceleración son perpendiculares).

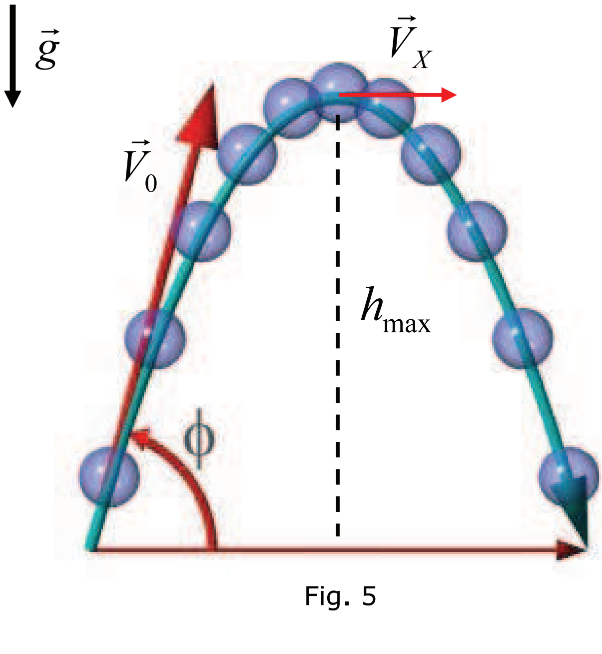


Fig. 5

Ejemplos:

Para los ejemplos y ejercicios, use $|\vec{g}| = 10 \, {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$

En los problemas desprecie fuerzas externas, salvo que se diga lo contrario.

1. Un cuerpo se deja caer libremente desde una altura de 80 m. ¿Qué tiempo emplea en llegar al piso?

   A) 4s
   B) 6s
   C) 8s
   D) 12s
   E) 16s

2. El cuerpo del problema anterior, ¿con qué rapidez llega al piso?

   A) 20 m/s
   B) 40 m/s
   C) 60 m/s
   D) 80 m/s
   E) 160 m/s

3. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s podemos afirmar correctamente que

   I) 4 s después del lanzamiento la pelota alcanza su altura máxima.
   II) la altura máxima que alcanza la pelota depende de la masa.
   III) la rapidez de la pelota disminuye constantemente desde que es lanzado hacia arriba y alcanza su altura máxima.

   A) Solo I
   B) Solo I y III
   C) Solo III
   D) I, II, III
   E) Ninguna de las anteriores.

4. En general la trayectoria de un proyectil en un campo gravitacional uniforme que se lanza con un cierto ángulo Φ con respecto a la horizontal ($0^0 < \Phi < 90^0$) es:

   A) Rectilínea
   B) Circular
   C) Parabólica
   D) Hiperbólica
   E) Elíptica

PROBLEMAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. En el movimiento de caída libre

   A) la rapidez es constante.
   B) la aceleración es constante.
   C) la aceleración aumenta paulatinamente.
   D) la rapidez final es de 10 m/s.
   E) la distancia recorrida es proporcional al tiempo.

2. En los lanzamientos verticales, si la rapidez con que un cuerpo es lanzado hacia arriba se duplica y despreciamos el roce, debe esperarse que la altura que alcance dicho cuerpo se

   A) duplique.
   B) triplique.
   C) cuadruplique.
   D) septuplique.
   E) conserve.

3. Si se lanza un cuerpo hacia abajo con una rapidez de 5 m/s, entonces al cabo de 1 s habrá recorrido

   A) 5 m
   B) 10 m
   C) 15 m
   D) 20 m
   E) 25 m

4. Si un objeto es lanzado hacia arriba, entonces, mientras está en el aire, la aceleración

   A) está siempre dirigida hacia arriba.
   B) se opone siempre a la velocidad.
   C) tiene siempre sentido del movimiento.
   D) es nula en el punto más alto de la trayectoria.
   E) está siempre dirigida hacia abajo.

5. Si se deja caer una piedra sin velocidad inicial, entonces al cabo de 1 s la rapidez de la piedra es igual a

   A) 10 m/s
   B) 5 m/s
   C) 4 m/s
   D) 2 m/s
   E) 1 m/s

6. Dos cuerpos A y B de masas $m_A = \frac{1}{2} m_B$, son lanzados verticalmente hacia arriba simultáneamente, con igual velocidad inicial a partir del suelo en una región donde la aceleración de gravedad es constante. Despreciando la resistencia del aire, podemos afirmar que

A) A alcanza una menor altura que B y llega al suelo antes que B.

B) A alcanza una menor altura que B y llega al suelo al mismo tiempo que B.

C) A alcanza igual altura que B y llega al suelo antes que B.

D) A alcanza una altura igual que B y llega al suelo al mismo tiempo que B.

E) A alcanza un altura igual que B y llega al suelo después que B.

7. La figura 6 muestra la trayectoria de una pelota. Si P es el vértice de la parábola (altura máxima), entonces en dicho punto

A) la velocidad es cero, pero la aceleración no es cero.
B) la velocidad no es cero, pero la aceleración es cero.
C) la rapidez es menor que en Q, pero la aceleración es mayor que en Q.
D) la velocidad y la aceleración son perpendiculares entre sí.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

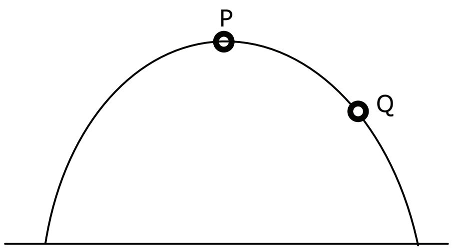


Fig.6

8. De un edificio es dejado caer un cuerpo desde el reposo. Si en el último segundo, antes de llegar al suelo recorre 25m, se puede concluir que fue abandonado desde una altura igual a

A) 20 m
B) 25 m
C) 45 m
D) 50 m
E) 90 m

9. Desde tierra se lanza hacia arriba un proyectil, el cuál en t segundos alcanza una altura máxima de h metros regresando luego al lugar de lanzamiento. En el intervalo de tiempo 2t segundos, la velocidad media del proyectil es igual a

A) 0
B) $\frac{h}{t}$
C) $\frac{h}{2t}$
D) $\frac{2t}{h}$
E) $\frac{4h}{t}$

10. La figura 7, muestra la siguiente situación:
Desde A y B se lanzan en el mismo instante 2 objetos iguales, verticalmente hacia arriba con velocidades iniciales v y 2v. Si el objeto que se lanzó desde el punto A, llega sólo hasta B, ¿cuál es la distancia que separa a los objetos cuando el cuerpo que se lanzó de B comienza a descender?

A) 2h
B) 3h
C) 4h
D) 5h
E) 6h

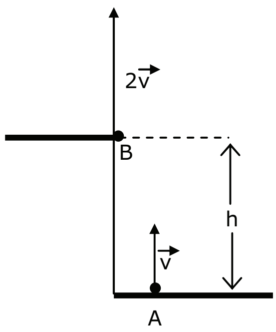


Fig.7

11. Se lanza una piedra hacia abajo, con rapidez inicial de 1 m/s. Entre 1s y 3s, la distancia recorrida es

A) 45 m
B) 48 m
C) 10 m
D) 6 m
E) 42 m

12. Si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 30 m/s, ¿qué tiempo emplea en alcanzar la máxima altura?

A) 1,5 s
B) 2 s
C) 2,5 s
D) 3 s
E) 6 s

13. Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de masa m con una rapidez inicial v, alcanzando una altura H. Si se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de masa 2m con una rapidez inicial 2v, ésta deberá alcanzar una altura igual a

A) $\frac{H}{2}$
B) H
C) 2 H
D) 4 H
E) $\sqrt{2H}$

14. Una pelota de tenis es soltada desde el reposo exactamente en el mismo instante y la misma altura, que una bala disparada de manera horizontal. De acuerdo a esta información se puede afirmar que

A) la bala golpea primero el suelo.
B) la pelota golpea primero el suelo.
C) ambas golpean al mismo tiempo el suelo.
D) golpea primero el suelo la que tenga mayor masa.
E) Nada se puede afirmar por falta de información.

15. Un astronauta en la Luna, arrojó un objeto verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 8m/s. Si el objeto tardó 5s para alcanzar el punto más alto de su trayectoria, entonces el valor de la aceleración de la gravedad lunar es

A) 9,8 m/s^2
B) 1,6 m/s^2
C) 3,2 m/s^2
D) 1,8 m/s^2
E) 2 m/s^2

16. Un objeto que se deja caer desde el reposo, recorre durante el primer segundo una distancia D_1. Si en el siguiente segundo recorre una distancia adicional D_2, entonces $\frac{D_1}{D_2} =$

A) 1 : 1
B) 1 : 2
C) 1 : 3
D) 1 : 4
E) 1 : 5

17. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su velocidad en función del tiempo se representa en el gráfico de la figura 8. La distancia recorrida desde t=0s hasta t=4s es de

A) 20 m
B) 40 m
C) 60 m
D) 80 m
E) 100 m

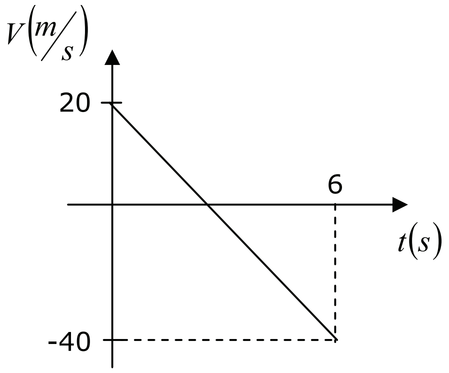


Fig.8

18. Un jugador de fútbol golpea una pelota la cuál se eleva y luego cae en un determinado punto de la cancha. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a la aceleración de la pelota durante el vuelo?

A) Es la misma durante todo el trayecto.
B) Depende de si la pelota va hacia arriba o hacia abajo.
C) Es máxima en la cúspide de su trayectoria.
D) Dependerá de cómo se golpeo la pelota.
E) Ninguna de las anteriores.

19. Un mismo cuerpo se deja caer desde una altura de 10m en dos planetas diferentes. Si en el primer planeta la velocidad de llegada a la superficie es de 10 $\sqrt{2}$ m/s y en el segundo planeta la aceleración de gravedad es el doble que en el primero, ¿con qué velocidad llega el cuerpo al piso en el segundo planeta?

A) 10 m/s
B) 20 m/s
C) 40 m/s
D) 10 $\sqrt{2}$ m/s
E) 20 $\sqrt{2}$ m/s

20. Desde una torre, se deja caer una piedra en t = 0s, y otra en t = 1s. En el instante t =3s la distancia que separa las piedras es

A) 20 m
B) 40 m
C) 10 m
D) 90 m
E) 25 m

Solución ejemplo 1

Como el cuerpo se deja caer desde 80m, el desplazamiento fue -80m (hacia abajo). Entonces usando la ecuación de posición de caída libre

$$-80 = -5 \cdot t^2$$

de donde se obtiene $t_{caida} = 4s$

La alternativa correcta es A

Solución ejemplo 2

Utilizando la ecuación de velocidad instantánea, al momento de tocar el suelo (t =4s)

$$\vec{V}(4) = -10 \cdot 4 = -40 \, {}^{m}/_{s}$$

el resultado es $40 \, {}^{m}/_{s}$ ya que es la rapidez (magnitud de la velocidad)

La alternativa correcta es B

Solución ejemplo 3

La afirmación I es falsa. Debemos analizar el tiempo de subida de la pelota el cual depende de la velocidad inicial y la aceleración de gravedad

$$t_{subida} = \frac{20}{10} = 2s$$

La afirmación II es falsa. No apelamos a la masa del objeto para decidir que la altura máxima es alcanzada 2s después de su lanzamiento.

La afirmación III es verdadera. La rapidez disminuye constantemente en el tiempo, ya que es un movimiento con aceleración constante.

La alternativa correcta es C

Solución ejemplo 4

El problema es de respuesta sencilla, pero daremos una demostración formal

La posición varia en dos dimensiones X e Y, al igual que su velocidad inicial $\vec{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y})$

La posición ésta dada por:

$$X(t) = V_{0x} \cdot t$$

$$Y(t) = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

esta expresión de Y es de la forma $Y = bx - ax^2$ (parábola), la cual se obtiene despejando el tiempo de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda se obtiene: $Y = \left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right) x - \left(\frac{g}{2V_{0x}^2}\right) x^2$

La alternativa correcta es C

DOFM-03

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web
http://pedrodevaldivia.cl/

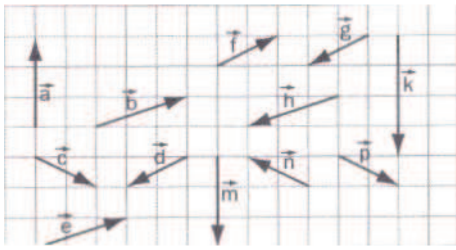
VECTORES. Actividades . 4º ESO (Op. B)

1. Dados los vectores de la figura, decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

1) $\vec{a} = \vec{m}$ 2) $\vec{m} = -\vec{k}$ 3) $\vec{b} = -\vec{h}$

4) $\vec{b} = \vec{e}$ 5) $\vec{f} = -\vec{g}$ 6) $\vec{g} = \vec{d}$

7) $\vec{b} = -\vec{n}$ 8) $\vec{c} = -\vec{p}$ 9) $\vec{n} = \vec{p}$



2. Dados los vectores de la figura anterior, dibuja los vectores:

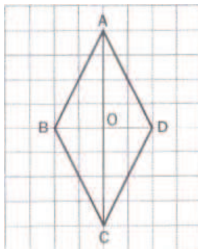
$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ $\vec{v} = -\vec{c} + 3\vec{d}$ $\vec{w} = 2\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$ $\vec{x} = -\vec{h} + \vec{m} - 2\vec{n}$

$\vec{y} = -2\vec{k} + \vec{p} + 4\vec{g} + \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{z} = \vec{m} + \vec{a} - 3\vec{c}$ $\vec{t} = 3\vec{b} - \vec{e} + 2\vec{h}$

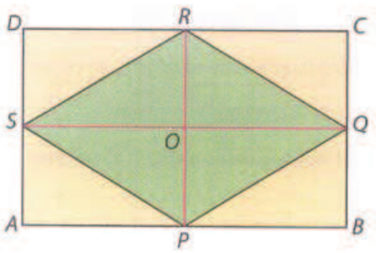
3. Dado el rombo de vértices ABCD, completa las siguientes igualdades:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$ $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$



4. A partir de los elementos que se indican en la siguiente composición geométrica:



a) Localiza todos los vectores que sean equipolentes al vector $\overrightarrow{AS}$

b) Expresa los vectores $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{RP}$, y $\overrightarrow{PR}$ en forma de combinaciones lineales de los vectores. $\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{SR}$

c) Señala todos los vectores que tengan el mismo módulo que $\overrightarrow{AP}$.

d) Indica todas las ternas de puntos que se encuentren alineados.

5. Calcula el resultado de las operaciones efectuadas con los vectores libres de esta ilustración:

a) $\vec{a} + \vec{e} - \vec{g}$

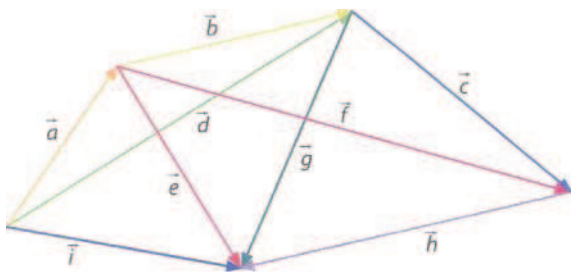
b) $\vec{e} - \vec{g} + \vec{c}$

c) $\vec{i} - \vec{h} - \vec{c} - \vec{b}$

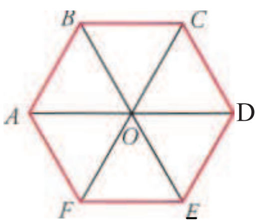
d) $\vec{c} - \vec{f} + \vec{e}$

e) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{h}$

f) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{h}$



6. Representa en este hexágono los siguientes vectores:



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}$

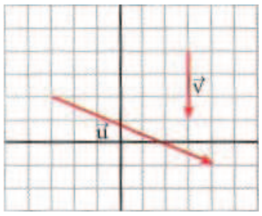
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF}$

e) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC}$

7. a) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

b) Dibuja el vector $\vec{u}+\vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.



8. Calcula los valores de m y n, sabiendo que el vector de origen, A(2, m - 2), y el del extremo, B(3n, 5), tienen de componentes (-5, 6).

9. Considerando los puntos A(3, -2) y B(-4, 5) y el vector $\vec{u}=(1, 6)$, halla las coordenadas de los siguientes puntos y vectores:

a) El punto C si el vector $\overrightarrow{AC}$ es equipolente con $\vec{u}$.

b) El punto D si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{u}$.

c) El punto E, que es punto medio del segmento $\overline{AB}$.

d) El vector $\vec{v}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

e) El vector $\overrightarrow{AF}$, que es equipolente con $-\vec{u}$

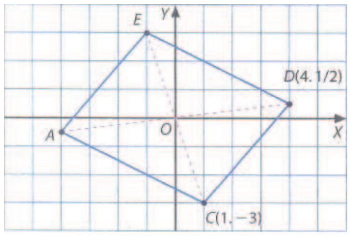
f) El vector $\vec{w}=\vec{u}-\overrightarrow{AB}$.

g) El origen, F, de $\vec{u}$ si su extremo es B.

h) El extremo, G, de $\vec{u}$ si su origen es A.

10. Dibuja en tu cuaderno un cuadrilátero cuyos vértices sean A(1, 2), B(-1, 2), C(-1, -3) y D(2, -3) y señala los puntos medios de los lados. Calcula las coordenadas de dichos puntos y demuestra que son los vértices de un paralelogramo.(Ayuda: comprueba que los puntos medios de los lados del cuadrilátero determinan dos pares de vectores equipolentes).

11. Calcula las coordenadas de los vértices A y E del siguiente paralelogramo:



12. Calcula m para que el vector $\vec{u}=(m+1, 2m)$:

a) Sea unitario. b) Tenga de módulo 2.

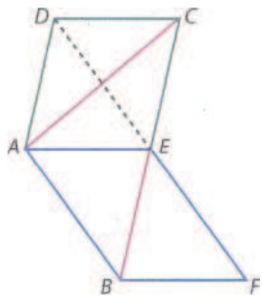
13. Dibuja en el plano cartesiano los puntos A(-2, 5) y B(1, -3) y otros tres puntos, P, Q y R, de modo que se cumpla que $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AR}=4\overrightarrow{AB}$. Calcula las coordenadas de P, Q y R.

14. Las componentes de $\overrightarrow{AB}$ son (-2, 3), y el punto A(3, 4). ¿Qué coordenadas tiene el punto B?

15. En la ilustración se ha dibujado un triángulo, ABC, y dos paralelogramos, AECD y AEFB, que tienen un vértice en el punto medio, E, del lado BC. Se sabe que A(3, 4), B(5, -1) y E(7, 3).

a) Establece las coordenadas de C, D y F.

b) Calcula las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{EC}$

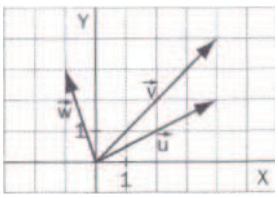


16. Dados los vectores de la figura, calcula el valor de las siguientes operaciones:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})-\vec{w}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

c) $\vec{u}\cdot(2\vec{v}+3\vec{w})-\vec{w}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$



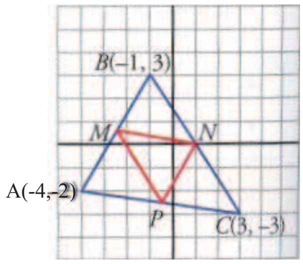
17. Calcula el módulo de los siguientes vectores: a) $\vec{u} = (3, 4)$ b) $\vec{v} = (-6, 8)$ c) $\vec{w} = (-24, -32)$

18. Consideramos los vectores $\vec{u} = (2, -2)$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Dibújalos y calcula el ángulo que forman.

19. Calcula un vector unitario $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (16, -30)$.

20. Calcula un vector unitario $\vec{v}$ que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (15, -8)$.

21. a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.
b) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{PN}$ y comprueba que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,



22. Averigua el valor de k para que se cumpla: $(6/5, -2) = k(-3, 5)$

23. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (x, 5)$ y $\vec{w} = (8, y)$, calcula *x* e *y* para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$

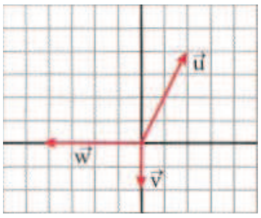
24. Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:
a) A(-1, 3), B(-2 , 2), C(-4, -2)
b) A(1, 0), B(-3, -2), C(5, 2)

25. Calcula m para que los puntos R(5,-2), S(-1, 1) y T(2, m) estén alineados.

26. Halla, en cada caso, el punto simétrico de A(-3, -5) respecto de: a) P(-2, 0) b) Q(2, -3)

27. El punto medio de un segmento es M(0, -3) y uno de sus extremos es (7, 2). ¿Cuál es el otro extremo?

28. a) Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?
b) Calcula m y n de modo que se cumpla: $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v}$



29. Halla las componentes de un vector $\vec{w}$ que verifique la siguiente igualdad:
$-2\vec{w} = 3\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{v}$ *con* $\vec{u} = (-2, 1)$, $\vec{v} = (4, -2)$

30. Los puntos A(-3, 1), B(1, -3) y C(4, 3) son tres vértices de un paralelogramo. Halla:
a) El vértice D opuesto a B.
b) Comprueba que las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.

31. Calcula el valor de *x* para que el vector libre $\vec{u} = (x, x+1)$ sea unitario.

32. Calcula el valor de *x* para que los vectores $\vec{a} = (x+3, 4)$ *y* $\vec{b} = (2, x-2)$ tengan igual módulo.

33. Calcula mediante operaciones vectoriales un punto D que forme un rectángulo con los puntos A(-3, -2), B(3, -2), C(3, 6). Calcula la longitud de los lados del rectángulo y la longitud de sus diagonales.

SOLUCIONES

1. Son verdaderas: 3, 4, 5 y 6

2.

3. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OO}$, $\overrightarrow{OO}$, $\overrightarrow{CB}$

4. **a)** $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{QC}$ **b)** $\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{PR}=-\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SR}$

c) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{DR}$, $\overrightarrow{RD}$, $\overrightarrow{RC}$, $\overrightarrow{CR}$ **d)** *A,P,B ; S, O, Q; D, R, C; A, S, D; P, O, R; B, Q, C*

5. **a)** $\vec{d}$ **b)** $\vec{f}$ **c)** $\vec{a}$ **d)** $\vec{g}$ **e)** $\vec{e}$ **f)** $\vec{i}$

6. **a)** $\overrightarrow{AO}$ **b)** $\overrightarrow{AD}$ **c)** $\overrightarrow{AO}$ **d)** $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{AD}$

7. **a)** $\vec{u}=(7,-3)$, $\vec{v}=(0,-3)$ b) $\vec{u}+\vec{v}=(7,-6)$

8. $m=1$, $n=-1$

9. a) $C(4,4)$ b) $D(11,-3)$ c) $E(-1/2,3/2)$ d) $\vec{v}=(-14,14)$ e) $\overrightarrow{AF}=(-1,-6)$ f) $\vec{w}=(8,-1)$ g) $F(-5,-1)$ h) $G(4,4)$

10. $M(0,2)$, $N(-1,-1/2)$, $P(1/2,-3)$, $Q(3/2,-1/2)$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}=(-1,-5/2)$

11. $E(-1,3)$, $A(-4,-1/2)$

12. **a)** $m=0$, $m=-2/5$ **b)** $m=-1$, $m=9/5$

13. $P(4,-11)$, $Q(7,-19)$, $R(10,-27)$

14. $B(1,7)$

15. **a)** $C(9,7)$, $D(5,8)$, $E(9,-2)$ **b)** $\overrightarrow{AB}=(2,-5)$, $\overrightarrow{AD}=(2,4)$, $\overrightarrow{AC}=(6,3)$, $\overrightarrow{AF}=(6,-6)$
$\overrightarrow{EB}=(-2,-4)$, $\overrightarrow{EF}=(2,-5)$, $\overrightarrow{EA}=(4,-1)$, $\overrightarrow{ED}=(-2,-5)$, $\overrightarrow{EC}=(2,4)$

16. **a)** 26 **b)** 32 **c)** 64

17. **a)** 5 **b)** 10 **c)** 40

18. $\alpha \cong 18.43^{o}$

19. $\vec{v}=(8/17,-15/17)$

20. $\vec{v}=(8/17,15/17)$

21. **a)** $M(-5/2,1/2)$, $N(1,0)$, $P(-1/2,-5/2)$ b) $\overrightarrow{MN}=(7/2,-1/2)$, $\overrightarrow{MP}=(2,-3)$, $\overrightarrow{PN}=(3/2,5/2)$

22. $k=-2/5$

23. $x=-2$, $y=-1$

24. **a)**No. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no son paralelos **b)** Si. . $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos

25. $m=-1/2$

26. **a)** $A'(-1,5)$ **b)** $A'(7,-1)$

27. $B\,(-7,-8)$

28. **a)** $\vec{u}=(2,4)$, $\vec{v}=(0,-2)$, $\vec{w}=(-4,0)$ **b)** $m=-2$, $n=-4$

29. $\vec{w}=(-2,1)$

30. **a)** $D(0,7)$ **b)** $M\,(1/2,2)$

31. $x=0$ o $x=-1$

32. $x=-17/10$

33. **a)** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow D(-3,6)$ **b)** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=8$ **c)** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=10$

PROBLEMAS DE CINEMÁTICA 4º ESO

MRU (hacer, además, las gráficas posición-tiempo de los problemas 2, 3 y 5, para los dos móviles)

1. Un coche inicia un viaje de 495 Km. a las ocho y media de la mañana con una velocidad media de 90 Km/h ¿A qué hora llegará a su destino? (Sol.: a las dos de la tarde).

2. Dos automóviles que marchan en el mismo sentido, se encuentran a una distancia de 126 Km. Si el más lento va a 42 Km/h, calcular la velocidad del más rápido, sabiendo que le alcanza en seis horas. (Solución: 63 km/h)

3. Un ladrón roba una bicicleta y huye con ella a 20 km/h. Un ciclista que lo ve, sale detrás del mismo tres minutos más tarde a 22 Km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo lo alcanzará? (Solución: 30 minutos).

4. Calcular la longitud de un tren cuya velocidad es de 72 Km/h y que ha pasado por un puente de 720 m de largo, si desde que penetró la máquina hasta que salió el último vagón han pasado ¾ de minuto. (Solución: 180 metros)

5. Dos coches salen a su encuentro, uno de Bilbao y otro de Madrid. Sabiendo que la distancia entre ambas capitales es de 443 Km. y que sus velocidades respectivas son 78 Km/h y 62 Km/h y que el coche de Bilbao salió hora y media más tarde, calcular : a) Tiempo que tardan en encontrarse b) ¿A qué distancia de Bilbao lo hacen? (Solución: tardan en encontrarse 2,5 horas; a 195 km de Bilbao).

MRUA (hacer, además, las gráficas x-t y v-t de los problemas 12, 13 y 16)

6. Una locomotora necesita 10 s. para alcanzar su velocidad normal que es 60 Km/h. Suponiendo que su movimiento es uniformemente acelerado ¿Qué aceleración se le ha comunicado y qué espacio ha recorrido antes de alcanzar la velocidad regular? (Sol.: 1,66 m/s^2; 83 m)

7. Un cuerpo posee una velocidad inicial de 12 m/s y una aceleración de 2 m/s^2 ¿Cuánto tiempo tardará en adquirir una velocidad de 144 Km/h? (Sol.: 14 s)

8. Un móvil lleva una velocidad de 8 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con movimiento acelerado cuya aceleración es igual a 2 cm/s^2. Calcular el tiempo que ha tardado en recorrer 2,10 m. (Sol.: 11 s)

9. Un motorista va a 72 Km/h y apretando el acelerador consigue al cabo de 1/3 de minuto, la velocidad de 90 Km/h. Calcular a) su aceleración media. b) Espacio recorrido en ese tiempo. (Sol.: 0,25 m/s^2 ; 450 m)

10. En ocho segundos, un automóvil que marcha con movimiento acelerado ha conseguido una velocidad de 72 m/h. ¿Qué espacio deberá recorrer para alcanzar una velocidad de 90 m/h? (Sol.: 450 m)

11. Se deja correr un cuerpo por un plano inclinado de 18 m. de longitud. La aceleración del móvil es de 4 m/s^2; calcular a) Tiempo que tarda el móvil en recorrer la rampa. b) velocidad que lleva al finalizar el recorrido inclinado. (Sol.: 3 s ; 12 m/s)

12. Un avión despega de la pista de un aeropuerto, después de recorrer 1000 m de la misma, con una velocidad de 120 Km/h. Calcular a) la aceleración durante ese trayecto. b) El tiempo que ha tardado en despegar si partió del reposo c) La distancia recorrida en tierra en el último segundo. (Sol.: 5/9 m/s^2 ; 60s; 33,1 m)

13. Dos cuerpos A y B situados a 2 Km de distancia salen simultáneamente uno en persecución del otro con movimiento acelerado ambos, siendo la aceleración del más lento, el B, de 32 cm/s^2. Deben encontrarse a 3,025 Km. de distancia del punto de partida del B. Calcular a) tiempo que tardan en encontrarse, b) aceleración de A. c) Sus velocidades en el momento del encuentro. (Sol.: 1375 s ; 7,28 m/s; 0,53 cm/s^2 ; 4,4 m/s)

14. Un tren que va a 50 Km/h debe reducir su velocidad a 25 Km/h. al pasar por un puente. Si realiza la operación en 4 segundos, ¿Qué camino ha recorrido en ese tiempo? (Sol.: 41,63 m)

15. ¿Qué velocidad llevaba un coche en el momento de frenar si ha circulado 12 m. hasta pararse (a = 30 cm/s^2). ¿Cuánto tiempo ha necesitado para parar? (Sol.: 2,68 m/s ; 8,93 s)

16. La velocidad de un vehículo es de 108 Km/h y en 5 segundos reduce la velocidad a 72 Km/h. Calcular el tiempo que tardó en pararse. (Sol.: 15 s)

17. Un avión recorre 1.200 m. a lo largo de la pista antes de detenerse cuando aterriza. Suponiendo que su deceleración es constante y que en el momento de tocar tierra su velocidad era de 100 Km/h. Calcular a) tiempo que tardó en pararse. b) Distancia que recorrió en los diez primeros segundos. (Sol.: 86,8 s ; 261,7 m)

CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL

18. Se suelta un cuerpo sin velocidad inicial. ¿Al cabo de cuánto tiempo su velocidad será de 45 Km/h?

19. Desde la azotea de un rascacielos de 120 m. de altura se lanza una piedra con velocidad de 5 m/s, hacia abajo. Calcular: a) Tiempo que tarda en llegar al suelo, b) velocidad con que choca contra el suelo.

20. Si queremos que un cuerpo suba 50 m. verticalmente. ¿Con qué velocidad se deberá lanzar? ¿Cuánto tiempo tardará en caer de nuevo a tierra?

21. Se dispara verticalmente un proyectil hacia arriba y vuelve al punto de partida al cabo de 10 s. Hallar la velocidad con que se disparó y la altura alcanzada.

22. Lanzamos verticalmente hacia arriba un proyectil con una velocidad de 900 Km/h. Calcular a) Tiempo que tarda en alcanzar 1 Km. de altura. b) Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima

23. Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con dos segundos de intervalo; el 1º con una velocidad inicial de 50 m/s y el 2º con una velocidad inicial de 80 m/s. Calcular a) Tiempo que pasa hasta que los dos se encuentren a la misma altura. b) A qué altura sucederá el encuentro. c) Velocidad de cada proyectil en ese momento.

MCU

24. Calcular la velocidad angular del planeta Tierra en su rotación. (Sol.: $7,26 \cdot 10^{-5}$ rad/s)

25. Una masa de 4 g. se mueve siguiendo una circunferencia de 60 cm de radio. Si gira a 3.000 rpm, calcular su velocidad angular en rad/s, y su velocidad lineal. (Sol.: 314 rad/s ; 188,4 m/s)

26. Un punto material describe una trayectoria circular de un metro de radio 30 veces por minuto. Calcular su velocidad lineal. (Sol.: 3,14 m/s)

27. Un punto recorre un círculo de 10 m de diámetro a razón de 450 vueltas cada ¼ de hora. Calcular: a) la velocidad angular en rpm; b) su velocidad lineal. (Sol.: 3,14 rad/s ; 15,7 m/s)

28. Una pelota de dos metros de diámetro gira con una velocidad de 9,425 m/s. ¿Cuántas vueltas da por minuto? (Sol.: 90 rpm)

29. Una rueda de 10 cm de radio gira a razón de 100 rpm. Calcular la velocidad lineal de un punto de su periferia. (Sol.: 1,05 m/s)