1.1 CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES

Definición de Magnitud

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente. También se entiende como cantidad física formada por un número y la unidad de medida respectiva. *Ejemplos*: 0.3 µm, 3 km, 24 m/s, 12 J.

Definición de Escalar

Cantidad física que solo tiene magnitud. Son ejemplo de escalares: distancia, masa, tiempo, rapidez, temperatura, área, volumen, densidad, trabajo, energía, potencia y frecuencia. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

Ejemplos: 4 m, 5 kg, 60 s, 20 m/s, 37 °C, 8 m^2, 4 m^3, 24 Kg/m^3, 1.78 J, 50 W y 333 Hz

Definición de Vector

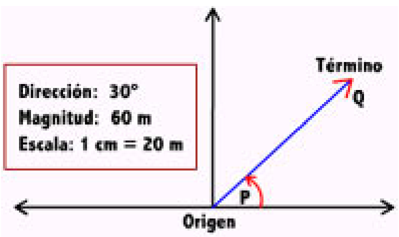
Cantidad física que tiene magnitud, dirección y sentido. Son ejemplo de vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el peso, la cantidad de movimiento, el desplazamiento, campo eléctrico y el campo magnético.(la palabra *vector* significa *portador* en latín).

Ejemplos: -4 m/s, +9.8 m/s^2, 500 N 30°, -25 Kg m/s y –20 m

Representación gráfica de vectores

Un vector se representa gráficamente, como un segmento dirigido de recta $\overline{PQ}$ de un punto *P* llamado *punto inicial o origen* a otro punto Q llamado *punto terminal o termino.* Una punta de flecha en un extremo indica el **sentido**; la longitud del segmento, interpretada con una escala determina la **magnitud.** La **dirección** del vector se especifica al dar los ángulos que forma el segmento de recta con los ejes de coordenadas.

Ejemplo:



Notación de vectores

Algebraicamente los vectores se representan con letras del alfabeto castellano, mayúsculas o minúsculas; usualmente en un texto impreso se utiliza la letra en negrita, tal como **b** que significa ambas propiedades del vector, magnitud y dirección. En la escritura manual ponemos una flecha sobre la letra para denotar la cantidad vectorial, tal como $\vec{b}$.

Ejemplos:

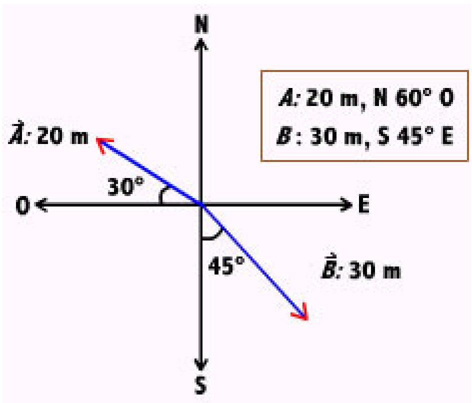
$\vec{a}$: -35 m/s**,** $\vec{A}$: 50 millas Norte**,** ***b***: 15 km Suroeste**, B**: 20 m Oeste, $\overrightarrow{PQ}$: 50 m/s 30°

La magnitud o longitud de un vector se representa colocando el vector entre barras o simplemente la letra asignada.

$|\vec{A}| =$ 50 millas, $A =$ 50 millas, $|\overrightarrow{PQ}| =$: 50 m/s , $\overline{PQ} =$: 50 m/s

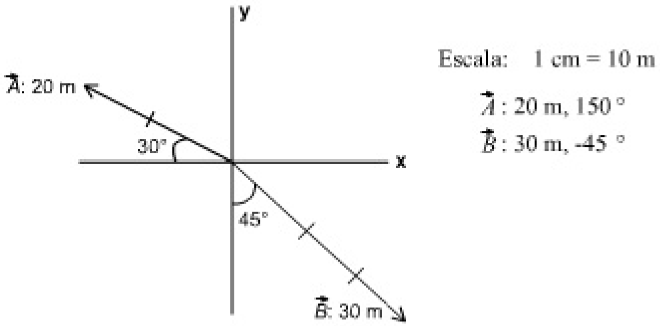
Dirección de un vector con puntos cardinales

Para dar la dirección de un vector mediante puntos cardinales se anota de primero el punto cardinal norte o sur de acuerdo a la ubicación del vector , luego el ángulo que forma con el norte o sur y finalmente el punto cardinal este u oeste según corresponda.



Dirección de un vector con la medida del ángulo (*coordenadas polares*)

En este caso se anota la magnitud del vector y el ángulo que forman la rama positiva del eje X y el vector, el ángulo se toma como positivo o negativo en la misma forma que se hace en los estudios de trigonometría. La magnitud del vector y el ángulo son llamados coordenadas polares.
Ejemplo:



Clasificación de vectores

Definición de línea de acción de un vector

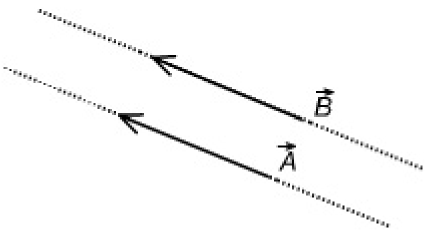
Es la recta a la que pertenece el vector

Ejemplo:

Vectores paralelos

Son aquellos que tienen sus líneas de acción paralelas.

Ejemplo:

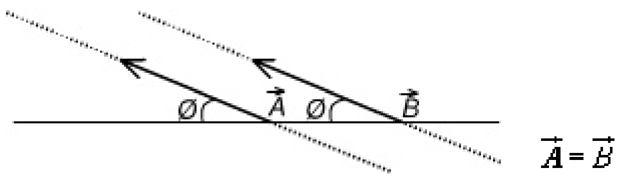


$\vec{A} \| \vec{B}$

Vectores iguales

Son aquellos vectores que tienen la misma magnitud ,dirección y sentido aunque no tengan el mismo punto de aplicación.

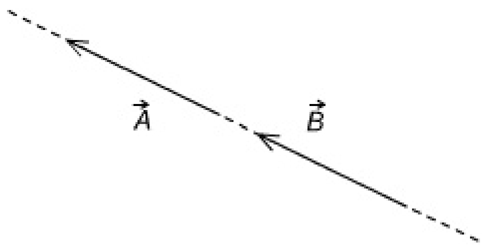
Ejemplo:



Vectores deslizantes

Son aquellos vectores que pueden moverse sobre su línea de acción sin cambiar su magnitud y dirección.

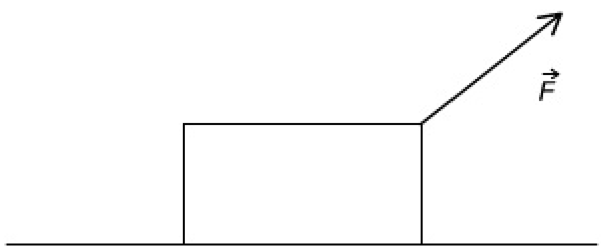
Ejemplo:



Vectores fijos

Son aquellos vectores que no deben deslizarse sobre su línea de acción porque interesa que el origen coincida con un punto de aplicación del sistema.

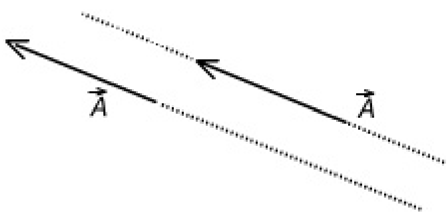
Ejemplo:



Vectores libres

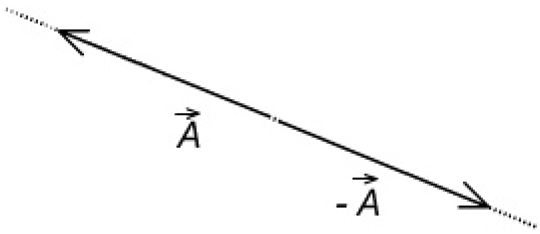
Son aquellos vectores que pueden moverse libremente en el espacio con sus líneas de acción paralelas.

Ejemplo:



Vector opuesto de un vector
Se define como aquel que tiene la misma magnitud del vector y está a 180° respecto al vector y se representa como el negativo del vector, $\vec{a} \Rightarrow -\vec{a}$ por lo cual se le llama vectores iguales y opuestos o ***antiparalelos***. Un vector puede ser opuesto a otro si solo tiene dirección opuesta.

Ejemplo:



Vector unitario: $\hat{a}$

Es aquel vector de magnitud la unidad o longitud unitaria y de igual dirección que el vector dado. Si **A** o $\vec{A}$ es un vector cualquiera de longitud A>0, entonces **A**/A o $\vec{A}/A$ es un vector unitario denotado por **a** o $\hat{a}$, con la misma dirección de **A**. Por lo tanto **A**=A**a** o $\vec{A} = A\hat{a}$

Ejemplo:

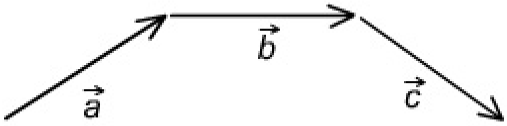
$\vec{A}$: 7 m 60° $\Rightarrow \hat{a} = \dfrac{\vec{A}}{A} = \dfrac{7m60°}{7} = 1$ m 60°

$\hat{a}$: 1 m 60°

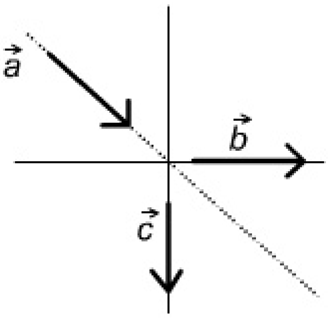
Por lo tanto podemos escribir el vector $\vec{A}$ como:

$$\vec{A} = A\hat{a}$$
$$\vec{A} = 7\hat{a}_{\text{m}}$$

Vectores consecutivos
Son aquellos vectores donde el término de uno coincide con el origen del siguiente.
Ejemplo:



Vectores concurrentes
Son aquellos vectores cuyas líneas de acción se intersecan en un punto.
Ejemplo:

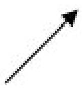


1.2 OPERACIONES CON VECTORES GRÁFICAMENTE

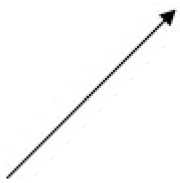
a)Multiplicación de un escalar por un vector gráficamente
Si se multiplica un escalar *e* por un vector ***A*** resulta el vector e ***A*** cuya magnitud ha sido multiplicada por e y el sentido depende del signo del escalar.

Ejemplo:

A : 2 m 30°



sí *e* = 2



e ***A*** = 2(2 m) = 4 m 30°

Practica 1.1
Dado el vector ***a*** : 50 m 300° . Hallar:
a) La representación del vector

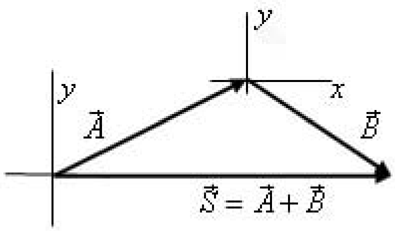
b) El vector opuesto de ***a***
c) El vector unitario de ***a***
d) Un vector concurrente a ***a***
e) Un vector consecutivo a ***a***
f) Un vector perpendicular a ***a***
g) Un vector cuya magnitud sea ½ ***a***

b) Suma gráfica de vectores

Para sumar vectores gráficamente existen diferentes métodos:

Método del triangulo
Es el método para sumar dos vectores consecutivos formando un triangulo con la resultante.
Se deben seguir los siguientes pasos:
1. En un diagrama dibujado a escala trazar el vector a con su dirección propia en el sistema de coordenadas.
2. Dibujar el vector ***b*** a la misma escala con la cola en la punta de ***a*** , asegurándose de que ***b*** tenga su misma dirección propia.
3. Se traza un vector desde la cola de ***a*** hasta la punta del vector ***b***. Se mide la longitud del vector resultante y se realiza conversión con la escala, esto nos da la magnitud del vector suma. Luego se mide el ángulo que forma el vector suma con la rama positiva del eje X.

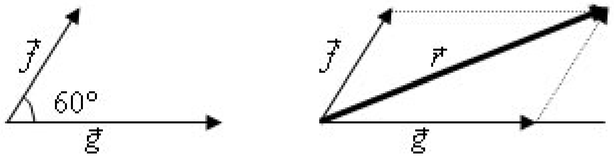
Ejercicio 1.1
Dados los siguientes vectores: ***A***: 30 m , 35°, ***B***: 20 m , -45°.Obtener el vector suma ***S*** = ***A*** + ***B***, mediante el método del triangulo.
Solución:



Método del paralelogramo
Es el método para sumar vectores concurrentes. Se dibujan los vectores ***f*** y ***g*** con origen común, luego en la figura se traza una paralela a ***f*** y por el término de ***f*** se traza una paralela a ***g*** ; ambas paralelas y los dos vectores forman un paralelogramo. El vector resultante ***r*** de sumar ***f*** y ***g*** se traza desde el origen de ambos vectores hasta la intersección de las paralelas. Se mide la longitud del vector resultante y se realiza conversión con la escala, esto nos da la magnitud del vector suma. Luego se mide el **ángulo que forma el vector suma con la rama positiva del eje X.**

Ejercicio 1.2
Dados los siguientes vectores: ***f*** : 25 m 60°, g : 35 m 0°.Obtener el vector suma **r** = ***f*** + ***g***, mediante el método del paralelogramo.

Solución:



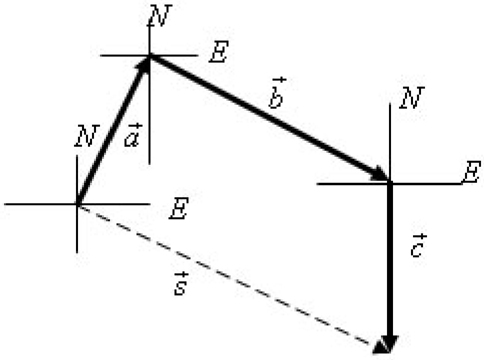
Método del polígono

Para sumar vectores por el método del polígono se colocan los vectores consecutivos y el vector suma es la resultante que va desde el origen del primer vector al término del último vector.

Ejercicio 1.3

Un auto se desplaza 300 m del Norte 30° al Este, luego 500 m del Sur 60° al Este y finalmente 300 m al Sur. Hallar la distancia y dirección a la que quedo del punto de inicio.

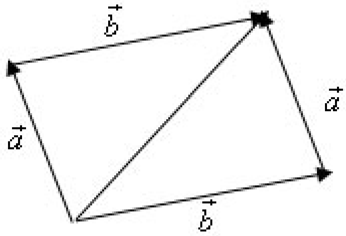
Solución:



Propiedades de la suma de vectores

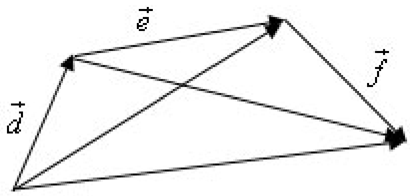
1. Ley conmutativa para la suma.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



2. Ley asociativa para la suma.

$\vec{d}+\left(\vec{e}+\vec{f}\right)=\left(\vec{d}+\vec{e}\right)+\vec{f}$



Leyes del álgebra vectorial

Si ***A***, ***B*** y *C* son vectores, *m* y *n* son escalares, entonces

1. ***A*** + ***B*** = ***B*** + ***A*** Ley conmutativa para la suma

2. ***A*** + (***B*** + ***C***) = (***A*** + ***B***) + ***C*** Ley asociativa para la suma
3. *m*(*n* ***A***)= (*mn*) ***A*** = *n*(m ***A***) Ley asociativa para la multiplicación
4. (*m* + *n*) ***A*** = *m* ***A*** + *n* ***A*** Ley distributiva
5. *m*(***A*** + ***B***) = *m* ***A*** + *m* ***B*** Ley distributiva
Observe que en estas leyes sólo la multiplicación de un vector por uno o más escalares está definida. Mas adelante se definen los productos entre vectores.

c) Resta gráfica de vectores
La resta de vectores es una suma indicada utilizando el concepto de vector opuesto.

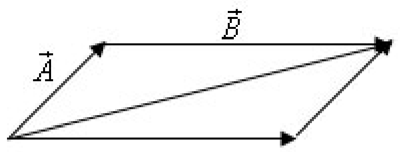
$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

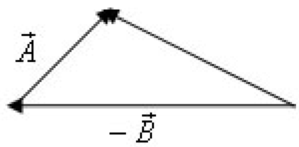
Tiene la propiedad de no ser conmutativa.

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

Ejemplo 1.4
Sean ***A***: 20 m 60° ***B***: 50 m 0°.
Hallar:
a) $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$
b) $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$
c) $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$

Solución:





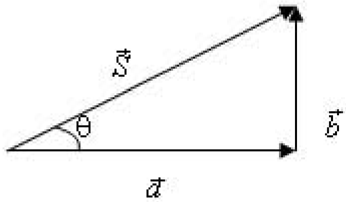
Practica 1.2
Sean ***A***: 30 m 110°
B: 50 m 60°
Hallar:
a) $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$
b) $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$
c) $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$
d) Pruebe que $\vec{A} - \vec{B} = -\left(\vec{B} - \vec{A}\right)$

1.3 OPERACIONES CON VECTORES ANALÍTICAMENTE

1) SUMA ANALÍTICA DE VECTORES
Para sumar vectores analíticamente existen diferentes métodos:

Método de teoremas
Consiste en hallar la resultante de la suma vectorial de dos vectores, utilizando relaciones como el teorema de Pitágoras o el teorema de cosenos y senos.

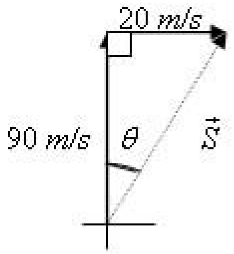
Teorema de Pitagoras
Cuando los vectores forman un ángulo recto la magnitud de la suma o resultante se obtiene por medio del teorema de Pitágoras y la dirección por la relación trigonométrica tangente.



$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Ejercicio 1.3
Un avión vuela hacia el Norte a 90 m/s un fuerte viento sopla hacia el este a razón de 72 km/h y desvía su rumbo. Hallar la velocidad del avión para un observador en la tierra.
Solución:



$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{(90)^2 + (20)^2} \qquad \tan\theta = \frac{20}{90}$$

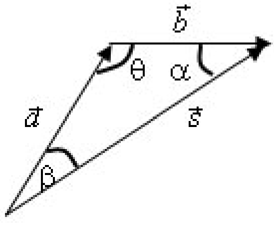
$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{8500} \qquad \tan\theta = 0.22\overline{2}$$

$$\left|\vec{S}\right| = 92.2\ m/s \qquad \theta = 12.5\ °$$

Para anotar la respuesta en coordenadas polares, tomamos el ángulo complementario
Respuesta: ***S***: 92.2 m/s , 77.5° (en coordenadas polares).

Ejercicio Propuesto:
Al oír la cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 6.0 m y 5.0 m, al oeste y al sur respectivamente. Calcule la magnitud y dirección del desplazamiento resultante utilizando el método del teorema de Pitágoras. Utilice el método gráfico para obtener la respuesta, compare los resultados.

Teorema de cosenos y senos
Cuando los vectores forman cualquier ángulo la magnitud de la suma o resultante se obtiene por medio del teorema de cosenos y la dirección por el teorema de los senos.

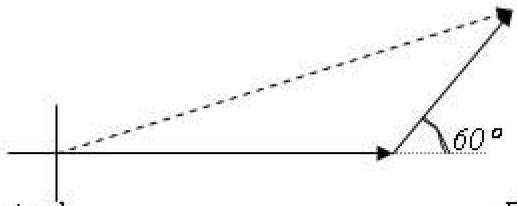


$$\left|s\right|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \qquad \textit{(Ley de cosenos)}$$

$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\theta}{c} \qquad \textit{(Ley de senos)}$$

Ejercicio 1.4
Dos hombres tiran de un bote, uno aplica una fuerza de 100 N y el otro de 80 N con un ángulo de 60° entre ellas. Hallar la fuerza resultante sobre el bote

Solución:



Para la magnitud

$$|s|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$|s|^2 = (100)^2 + (80)^2 - 2(100)(80)\cos 120°$$

$$|s|^2 = 10000 + 6400 - -8000$$

$$|s| = \sqrt{24400}$$

$$|s| = 156.2 \ m/s$$

Para la dirección

$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\theta}{c}$$

$$\frac{sen\,\beta}{80} = \frac{sen 120°}{156.2}$$

$$sen\,\beta = \frac{80 sen 120°}{156.2}$$

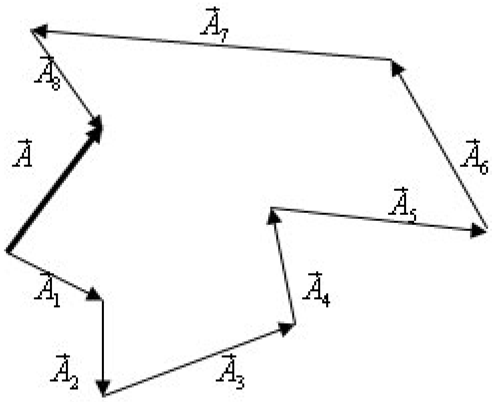
$$sen\,\beta = 0.4435$$

$$\beta = 26.3°$$

Respuesta: ***s*** : 156.2 m/s, 26.3° (en coordenadas polares)

Ejercicio Propuesto:
Un conductor de automóvil maneja 3 km en la dirección de 60° noreste y luego 4 km en la dirección norte.¿Dónde termina respecto de su punto de inicio?.Utilice el método anterior, compare su resultado con su respuesta si utiliza el método grafico.

Método de componentes rectangulares
Dado un vector puede ser expresado en términos de muchos vectores que se suman consecutivamente llamados vectores componentes del vector.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 + \vec{A}_5 + \vec{A}_6 + \vec{A}_7 + \vec{A}_8$$

La división de un vector en componentes no es única dado que un vector puede formarse por suma de muy diversas maneras, pero es de mayor utilidad descomponer un vector solo en términos de sus vectores componentes rectangulares o cartesianas.

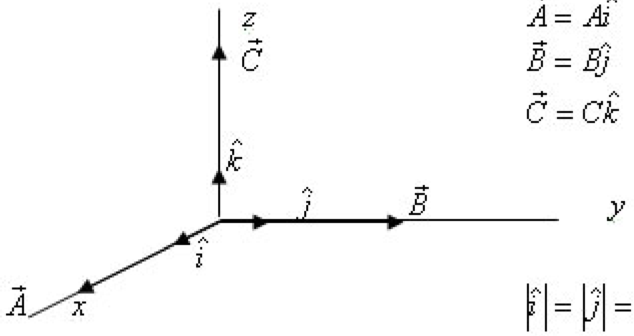
a) Componentes Rectangulares o Cartesianas de un Vector
Entre el ilimitado número de posibles divisiones de un vector en componentes tiene especial importancia las que se restringen a la dirección de los ejes cartesianos.

Vectores unitarios rectangulares

Los vectores unitarios rectangulares ***i***, ***j*** y ***k*** son vectores unitarios cuya dirección y sentido es la de los ejes positivos x, y, y z de un sistema de coordenadas rectangulares, a menos que se especifique de otra manera. Tales sistemas derivan su nombre del hecho de que un tornillo de rosca derecha girado 90° de Ox a Oy, avanzará en la dirección z positiva.

Se dice que tres vectores que tienen puntos iniciales coincidentes, y que no son coplanares forman *un sistema derecho o sistema diestro* si un tornillo de rosca derecha girado en un ángulo menor que 180° de a avanza en la dirección .

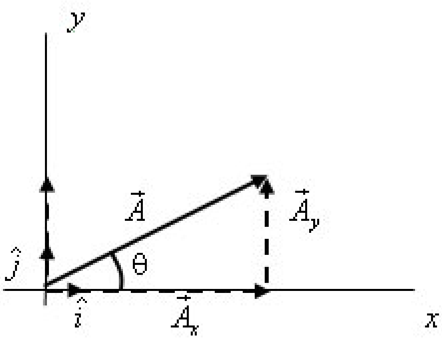
A partir de este punto, las letras ***i***, ***j*** y ***k*** sin el techo que ves encima de ellos representaran también vectores unitarios, dado esto veamos la representación grafica de vectores unitarios.



$$\vec{A} = A\hat{i}$$
$$\vec{B} = B\hat{j}$$
$$\vec{C} = C\hat{k}$$

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Componentes de un vector en el plano



$\vec{A}_x$: componente en la dirección del eje X

$\vec{A}_y$: componente en la dirección del eje Y

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$:Definición de suma de vectores

Utilizando los vectores unitarios, se tiene

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y\hat{j}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

Módulo o magnitud del vector

Usando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\left|\vec{A}\right|^2 = \left|\vec{A}_x\right|^2 + \left|\vec{A}_y\right|^2$$: los vectores unitarios tienen magnitud unitaria.

$$\left|\vec{A}\right| = +\sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$$: magnitud del vector.

Relaciones útiles

$$A_x = A\ cos\ \theta \qquad \Leftarrow \qquad \frac{A_x}{A} = \cos\theta$$

$$A_y = A\ sen\ \theta \qquad \Leftarrow \qquad \frac{A_y}{A} = sen\,\theta$$

$$tan\ \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$ dirección del vector.

Ejercicio 1.5
Calcule las componentes x, y de los siguientes vectores:
a : 12 m, N 37° E
b : 15 m, -40°
c : 6 m, 60° con x negativo en el tercer cuadrante
Solución:

$$\begin{array}{lll} a_x = a\cos\theta & b_x = b\cos\theta & c_x = c\cos\theta \\ a_x = 12m\cos 53° & b_x = 15m\cos -40° & c_x = 6m\cos 240° \\ a_x = 7.2\ m & b_x = 11.5\ m & c_x = -3\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_y = asen\,\theta & b_y = bsen\,\theta & c_y = csen\,\theta \\ a_y = 12msen53° & b_y = 15msen-40° & c_y = 6msen240° \\ a_y = 9.6\ m & b_y = -9.6\ m & c_y = -5.2\ m \end{array}$$

$$\therefore\ \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \qquad \therefore\ \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} \qquad \therefore\ \vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j}$$

$$\therefore\ \vec{a} = (7.2\hat{i} + 9.6\hat{j})\ m \qquad \therefore\ \vec{b} = (11.5\hat{i} - 9.6\hat{j})\ m \qquad \therefore\ \vec{c} = (-3\hat{i} - 5.2\hat{j})\ m$$

Ejercicio Propuesto:
Calcule las componentes x, y de los siguientes vectores:
A : 2.4 m, S 20° O
B : 1.7 m, -120°
C : 3.4 m, 30° con x negativo en el segundo cuadrante

Ejercicio 1.6
Calcule la magnitud y dirección del vector representado por los siguientes pares de

componentes:

a) $A_x = 3.6$ cm, $A_y = $-7.2 cm

b) $B_x = $-1.4 cm, $B_y = $-9.35 cm

<u>Solución:</u>

$$\left|\vec{A}\right| = +\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} \qquad \left|\vec{B}\right| = +\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = +\sqrt{(3.6)^2 + (-7.2)^2} \qquad \left|\vec{B}\right| = +\sqrt{(-1.4)^2 + (-9.35)^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = +\sqrt{64.8} \qquad \left|\vec{B}\right| = +\sqrt{89.4}$$

$$\left|\vec{A}\right| = +8.04\ cm. \qquad \left|\vec{B}\right| = +9.45\ cm.$$

$$\tan\theta = \frac{-7.2}{3.6} \qquad \tan\beta = \frac{-9.35}{-1.4}$$

$$\theta = -63.4° \qquad \beta = 81.5°$$

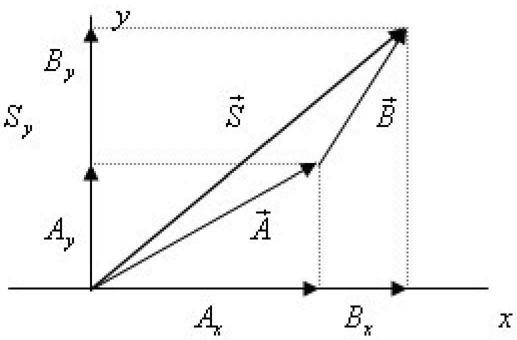
<u>Respuestas:</u> $\vec{A}$: *8.04 cm, -63.4º;* $\vec{B}$: *9.45 cm, 261.5º*

Ejercicio Propuesto:
Calcule la magnitud y dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes:
a) a_x : -2.34 km, a_y : 8.70 km
b) b_x : 1.60 km, b_y : 5.75 km

b) Suma de varios vectores en el plano

Sean los siguientes vectores, todos en el plano XY

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$
. . . .



Sumando los vectores se tiene

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \ldots$$

$$\vec{S} = (A_x + B_x + C_x + \ldots)\hat{i} + (A_y + B_y + C_y + \ldots)\hat{j}$$

$S_x = (A_x + B_x + C_x + ...)$: suma de las componentes en la dirección del eje X

$S_y = (A_y + B_y + C_y + ...)$: suma de las componentes en la dirección del eje Y

$\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j}$: vector resultante

$\left|\vec{S}\right| = +\sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2}}$: magnitud del vector resultante

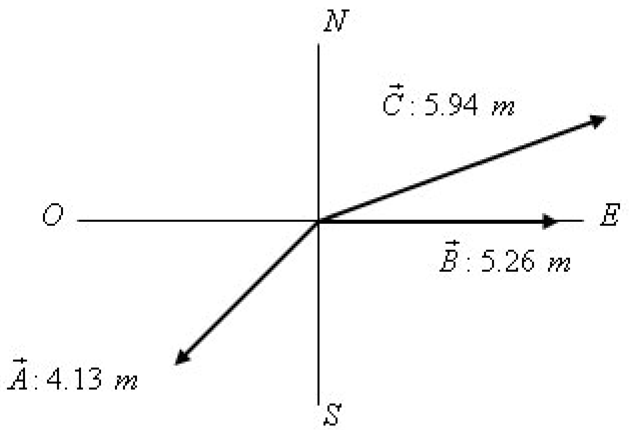
$$tan\ \theta = \frac{S_y}{S_x}$$

$\theta = arc\ tan\left(\dfrac{S_y}{S_x}\right)$: ángulo que forma el vector resultante

Ejercicio 1.7

Una partícula experimenta tres desplazamientos sucesivos en un plano, como sigue: 4.13 m SO, 5.26 m E, y 5.94 m en una dirección de 64° NE. Elija el eje x apuntando al este y el eje y apuntando hacia el norte, y halle (a) las componentes de cada desplazamiento, (b) las componentes del desplazamiento resultante, (c) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante, y (d) el desplazamiento que se requerirá para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque.

Solución:



(a)

$A_x = A\cos\theta$ $\quad B_x = B\cos\theta$ $\quad C_x = C\cos\theta$

$A_x = 4.13m\cos 225°$ $\quad B_x = 5.26m\cos 0°$ $\quad C_x = 5.94m\cos 26°$

$A_x = -2.9\ m$ $\quad B_x = 5.26\ m$ $\quad C_x = 5.34\ m$

$A_y = Asen\,\theta$ $\quad B_y = Bsen\,\theta$ $\quad C_y = Csen\,\theta$

$A_y = 4.13msen225°$ $\quad B_y = 5.26msen0°$ $\quad C_y = 5.94msen26°$

$A_y = -2.9\ m$ $\quad B_y = 0\ m$ $\quad C_y = 2.6\ m$

$\therefore\ \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ $\quad \therefore\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$ $\quad \therefore\ \vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$

$\therefore\ \vec{A} = (-2.9\hat{i} - 2.9\hat{j})\ m$ $\quad \therefore\ \vec{B} = (5.26\hat{i} + 0\hat{j})\ m$ $\quad \therefore\ \vec{C} = (5.3\hat{i} + 2.6\hat{j})\ m$

(b)

$$\vec{A} = (-2.9\hat{i} - 2.9\hat{j})\ m$$
$$\vec{B} = (5.26\hat{i} + 0\hat{j})\ m$$
$$\vec{C} = (5.3\hat{i} + 2.6\hat{j})\ m$$
$$\vec{S} = (7.7\hat{i} - 0.3\hat{j})\ m$$

(c)

$$S = +\sqrt{{S_x}^2 + {S_y}^2} \qquad \tan\theta = \frac{S_y}{S_x}$$

$$S = +\sqrt{(7.7)^2 + (-0.3)^2} \qquad \tan\theta = \frac{-0.3}{7.7}$$

$$S = +7.7\ m \qquad \theta = -2.2°$$

(d)

el desplazamiento que se requerirá para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque es de 7.7 m, en una dirección de $\theta = -2.2°$.

Ejercicio Propuesto:
El vector ***A*** es de 2.80 cm y está 60° sobre el eje x en el primer cuadrante. ***B*** es de 1.90 cm y está 60° por debajo del eje x en el cuarto cuadrante. Obtenga la magnitud y dirección de ***A*** + ***B***. Dibuje un diagrama de la suma y muestre que sus respuestas numéricas concuerdan con las de su dibujo.

c) Componentes de un vector en el espacio tridimensional

El procedimiento desarrollado para los vectores en el plano se extiende al espacio tridimensional de la siguiente forma. Cualquier vector A en tres dimensiones se representa con su punto inicial en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Sean (A_x, A_y, A_z) las coordenadas rectangulares del punto terminal de un vector ***A*** (recuerda que ***A*** *y* $\vec{A}$ representa el mismo vector) con punto inicial en O. Los vectores $\vec{A}_x = A_x\hat{i}$, $\vec{A}_y = A_y\hat{j}$, $\vec{A}_z = A_z\hat{k}$ reciben el nombre de componentes rectangulares de un vector o simplemente vectores componentes en las direcciones de x, y, y z respectivamente. Por comodidad en la notación cada vector componente se expresa por la magnitud de la componente por un vector unitario en cada eje. A estos vectores unitarios se les designa por $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$ donde:

$$\hat{i} = \text{vector unitario en el eje } x = (1,0,0)$$
$$\hat{j} = \text{vector unitario en el eje } y = (0,1,0)$$
$$\hat{k} = \text{vector unitario en el eje } z = (0,0,1)$$

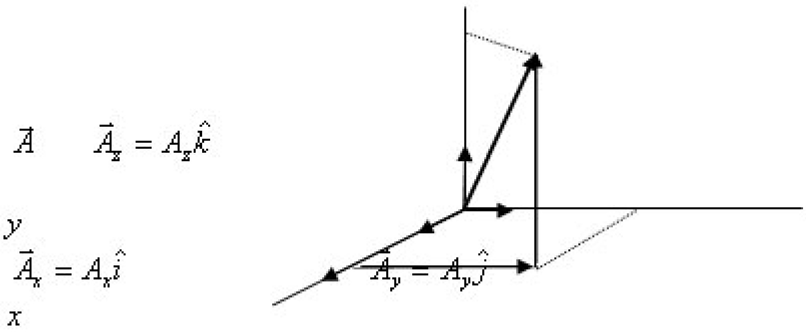
Por lo tanto un vector en componentes rectangulares de tres dimensiones se escribe de la siguiente manera.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

[4] Sears F.W. Física Universitaria. Novena edición. Pearson Educación. México.1999. Pb.1-37

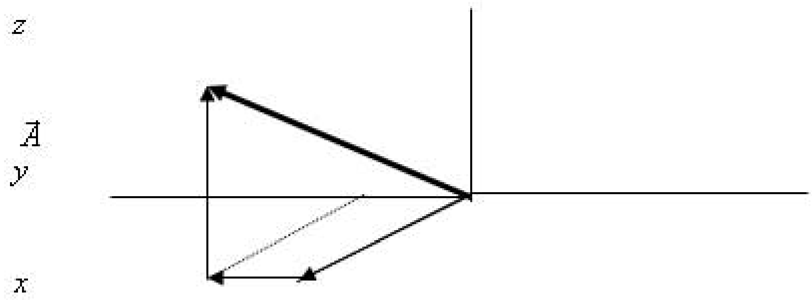
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

donde (A_x, A_y, A_z) son las magnitudes de los vectores componentes rectangulares o sea las proyecciones del vector sobre los ejes x, y y z.



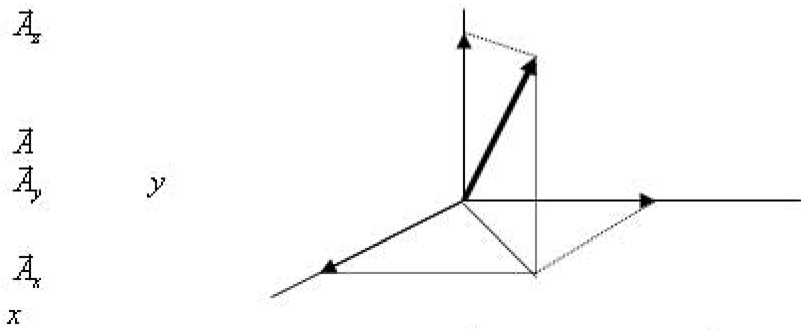
De esta manera el vector queda expresado así $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

Ejercicio 1.8
Representar el vector ***A*** : (3, -2, 3)



Practica 1.3
Represente los siguientes vectores (2, 2, 4) , (-2, 4, 3)

Magnitud de un vector en tres dimensiones
La magnitud se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras dos veces.



$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}\right)^2 + A_z^{\,2}}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}} \quad \text{: Magnitud del vector}$$

Dirección de un vector en tres dimensiones

La dirección del vector ***A*** en tres dimensiones se puede obtener de dos maneras:

a) por medio de los cosenos de los ángulos directores

Son los ángulos que el vector forma con cada eje.

α = ángulo entre el vector y el eje x

β = ángulo entre el vector y el eje y

γ = ángulo entre el vector y el eje z

Los cosenos son respectivamente

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} \quad \Rightarrow \quad A_x = \left|\vec{A}\right|\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|} \quad \Rightarrow \quad A_y = \left|\vec{A}\right|\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{\left|\vec{A}\right|} \quad \Rightarrow \quad A_z = \left|\vec{A}\right|\cos\gamma$$

Luego se obtiene la función inversa para obtener cada ángulo. Por lo tanto todo vector en tres dimensiones se puede expresar con los ángulos directores así.

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\cos\alpha\hat{\imath} + \left|\vec{A}\right|\cos\beta\hat{\jmath} + \left|\vec{A}\right|\cos\gamma\hat{k}$$

donde

$$A^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\beta + A^2\cos^2\gamma$$

b) por medio de los ángulos θ y ϕ de las coordenadas esféricas

Definimos dos ángulos; θ como el ángulo que hace el vector con el eje Z y ϕ como el ángulo que hace la proyección del vector sobre el plano XY con el eje X positivo (ver figura). Estos ángulos están dados de la siguiente forma:

$$\cos\theta = \frac{A_z}{A} \quad \Rightarrow \quad A_z = A\cos\theta$$

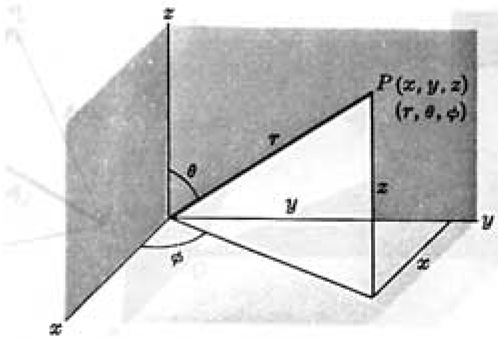
$$\tan\phi = \frac{A_y}{A_x} \quad \Rightarrow \quad A_y = A_x \tan\phi$$

con esto se puede demostrar que:

$$A_x = A sen\theta \cos\phi$$

$$A_y = A sen\theta sen\phi$$

$$A_z = A\cos\theta$$



A las variables (r,θ,ϕ) se les llama coordenadas esféricas. En nuestro caso r = A. Por lo tanto todo vector en tres dimensiones se puede expresar de la siguiente forma.

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Solución:

a)Por medio de cósenos directores

$F_x = F\cos\alpha$ $\quad F_y = F\cos\beta$ $\quad F_z = F\cos\gamma$

$F_x = ?$ $\quad F_y = ?$ $\quad F_z = 500N\cos 40°$

$F_z = 383.0\ N$

$F_x = R sen\alpha$ $\quad F_y = R\cos\alpha$

$F_x = 321.4N sen 30°$ $\quad F_y = 321.4N\cos 30°$

$F_x = 160.7\ N$ $\quad F_y = 278.3\ N$

$sen\gamma = \frac{R}{F} \quad \Rightarrow \quad R = F sen\gamma$

$R = 500 sen 40°$ $\quad R = 321.4\ N$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{160.7}{500} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 71.2^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{278.3}{500} \quad \Rightarrow \quad \beta = 56.2^\circ$$

b)Por medio de coordenadas esféricas

Como $\theta = 40^\circ$ y $\phi = 60^\circ$, tenemos

$F_x = Fsen\theta\cos\phi$	$F_y = Fsen\theta sen\phi$	$F_z = F\cos\theta$
$F_x = 500Nsen40^\circ\cos 60^\circ$	$F_y = 500Nsen40^\circ sen60^\circ$	$F_z = 500N\cos 40^\circ$
$F_x = 160.7N$	$F_y = 278.3N$	$F_z = 383.0N$

Los ángulos se obtienen como en el caso anterior.

Ejercicio Propuesto:

Una fuerza F actúa en el origen de un sistema en una dirección dado por $\alpha = 75^\circ$ y $\gamma = 130^\circ$

Sabiendo que $F_y = 300$ N.

Hallar:

a) La fuerza F
b) Las componentes F_x y F_z
c) El ángulo β

Respuesta: $F = 416.1N, F_x = 107.7N, F_z = 267.4N, \beta = 43.8^\circ$

d) Suma de vectores en el espacio

La suma de vectores en el espacio se realiza de manera similar a la empleada para los vectores en el plano.

Sean los siguientes vectores,

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

. . . .

Sumando los vectores se tiene

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + ...$$

$$\vec{S} = (A_x + B_x + C_x + ...)\hat{i} + (A_y + B_y + C_y + ...)\hat{j} + (A_z + B_z + C_z + ...)\hat{k}$$

$S_x = (A_x + B_x + C_x + ...)$: suma de las componentes en la dirección del eje X

$S_y = (A_y + B_y + C_y + ...)$: suma de las componentes en la dirección del eje Y

$S_z = (A_z + B_z + C_z + ...)$: suma de las componentes en la dirección del eje Z

$\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} + S_z\hat{k}$: vector resultante

$|\vec{S}| = +\sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2} + S_z^{\,2}}$: magnitud del vector resultante.

La dirección se obtiene por medio de una de las formas mencionadas anteriormente.

Ejercicio 1.11

Dados los vectores:

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j}$

Hallar:

a) $\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c})\right)$

b) la magnitud y dirección de $\vec{S}$

c) Un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$

d) Un vector opuesto a $\vec{b}$

e) El vector $5\vec{a}$

Solución:

(a)

$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = -3\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$3(\vec{b} + \vec{c}) = -9\hat{i} - 15\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c}) = -6\hat{i} - 13\hat{j} + 11\hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c})\right) = -\frac{6}{2}\hat{i} - \frac{13}{2}\hat{j} + \frac{11}{2}\hat{k}$$

$$\vec{S} = -3\hat{i} - 6.5\hat{j} + 5.5\hat{k}$$

(b)

$$\left|\vec{S}\right| = +\sqrt{(-3)^2 + (-6.5)^2 + (5.5)^2}$$

$$\vec{S} = 9.03$$

$\vec{A} = Asen\,\theta\cos\phi\hat{i} + Asen\,\theta sen\,\phi\hat{j} + A\cos\theta\hat{k}$

Ejercicio 1.9

Dado el vector $\vec{C}$: 25 m $\alpha = 175°$

$\beta = 75°$

$\gamma = 140°$

Expresarlo en componentes rectangulares.

Solución:

$C_x = |\vec{C}|\cos\alpha$ $C_y = |\vec{C}|\cos\beta$ $C_z = |\vec{C}|\cos\gamma$

$C_x = 25m\cos 175°$ $C_y = 25m\cos 75°$ $C_z = 25m\cos 140°$

$C_x = -24.9\ m$ $C_y = 6.5\ m$ $C_z = -19.1\ m$

$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$

$\vec{C} = (-24.9\hat{i} + 6.5\hat{j} - 19.1\hat{k})\ m$

Ejercicio 1.10

En el siguiente diagrama, hallar:

a) Las componentes F_x, F_y, F_z
b) Los ángulos α, β, γ

z

$\vec{F}_z$

$F = 500\ N$

40°

$\vec{F}$

$\vec{F}_y$ y

30°

$\vec{F}_x$