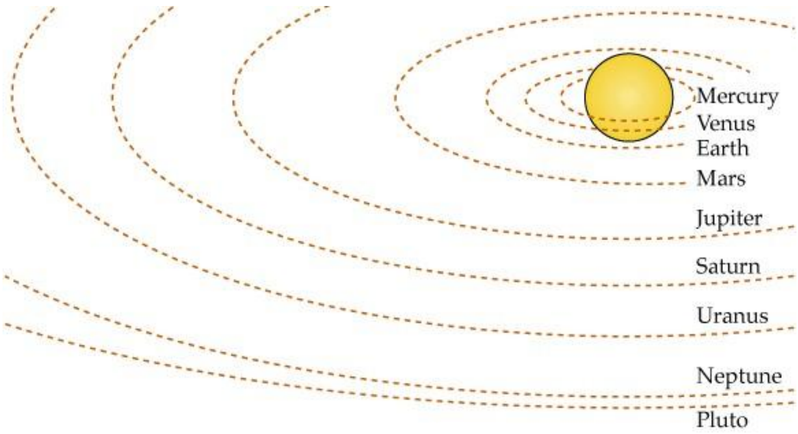
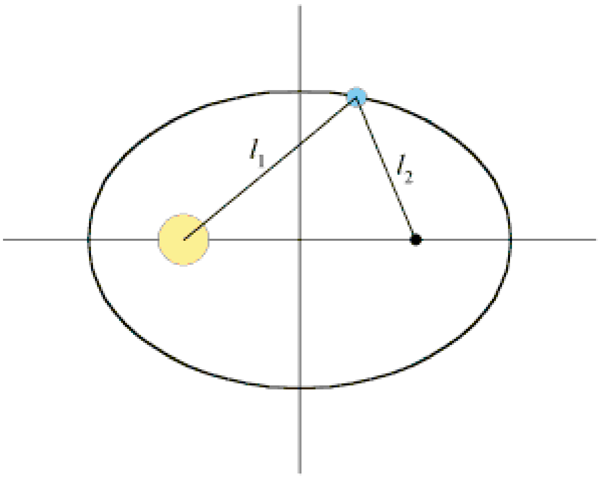
Curso de nivelación Gravitación 14 Octubre (2 horas)

Las leyes de Kepler

La primera ley es:

"**La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco**"





Normalmente, esto no es exacto al 100%. Imagina el planeta haciéndose más y más pesado de forma mágica, mientras que el Sol se hace más y más ligero. En algún punto ambos serán igual de pesados: ¿podemos decir cuál orbita alrededor de cuál?

La ecuación de una circunferencia de radio R, con su centro en el origen de coordenadas
$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$

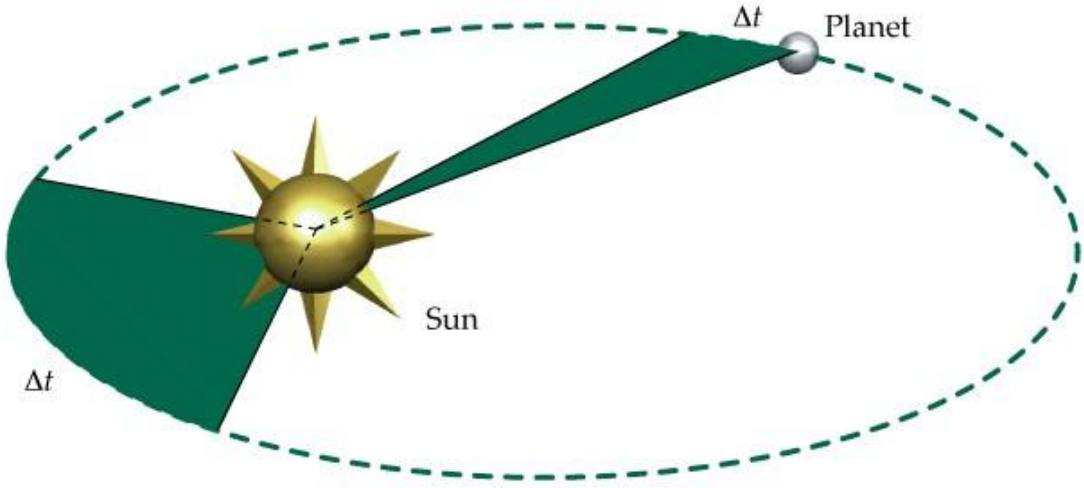
si ambos lados se dividen por R^2:

$$(x^2/R^2) + (y^2/R^2) = 1$$

La ecuación de una **elipse** tiene ese aspecto, con una pequeña modificación:

$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) =$ **1,** a y b son los semiejes **;** $l_1 + l_2 =$ constante

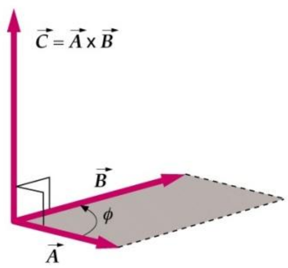
La segunda ley es: "**El radio vector barre iguales áreas en iguales tiempos**""



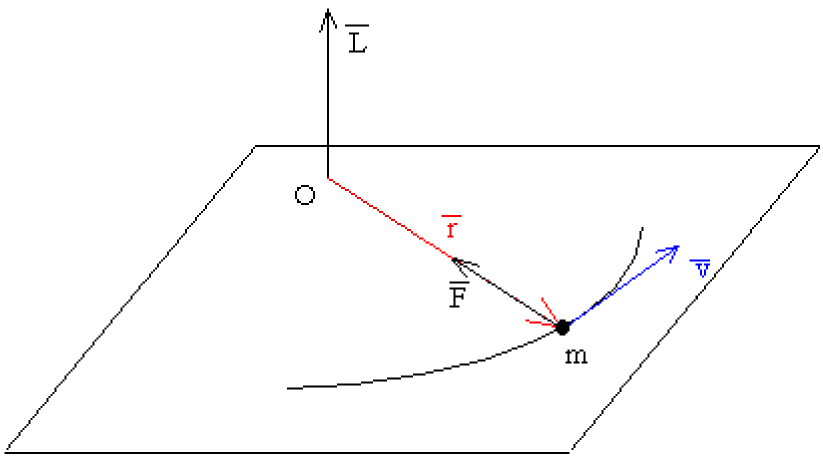
Las regiones coloreadas (de igual área) son barridas en tiempos iguales. En el mismo tiempo, en la región cerca del sol, el planeta debe recorrer un arco de elipse de mayor longitud. En el **perigeo**, el planeta tiene mayor velocidad.

Esta ley significa que el momento angular del planeta se conserva.

La atracción del Sol sobre el planeta es una fuerza central, es decir que r y F son paralelos y pasan por el Sol (en el punto O)



L = r x m v y dL/dt= M = r x ma =0



En 1619 Kepler publicó su tercera ley:

el cuadrado del período orbital *T* es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol (la mitad de la suma de la distancia mayor y la menor).

$$\mathbf{T^2 = k\, a^3}$$

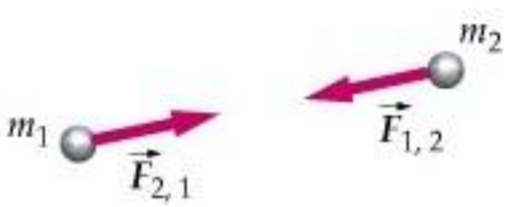
siendo ***k*** una constante ($4\pi/GM_{sol}$), la misma para todos los planetas del sistema solar. Supón que medimos todas las distancias en "unidades astronómicas" ó AU, siendo 1 AU la distancia media entre la Tierra y el Sol. Luego si ***a*** = 1 AU, ***T*** es un año y ***k***, con estas unidades, es igual a 1, p.e.. $\mathbf{T^2 = a^3}$. Aplicando ahora la fórmula a cualquier planeta, si ***T*** es conocido por las observaciones durante muchos años, la ***a*** para el planeta considerado, su distancia media del Sol, se calcula fácilmente. Hallar el valor de 1 AU en millas ó kilómetros, o sea, hallar la escala real del sistema solar, no es fácil. Nuestras mejores mediciones actualmente son las proporcionadas por las herramientas de la era espacial, mediante mediciones de radar de Venus y por pruebas espaciales planetarias; siendo una buena aproximación: 1 AU = 150 000 000 km.

Ley de gravitación de Newton

La gravitación es la fuerza de atracción mutua que experimentan los cuerpos por el hecho de tener una masa determinada. La existencia de dicha fuerza fue establecida por el matemático y físico inglés Isaac Newton en el s. XVII, quien, además, desarrolló para su formulación lo que, en la actualidad, se conoce como cálculo integral.

La ley formulada por Newton y que recibe el nombre de ley de la gravitación universal, afirma que **la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (ley de la inversa del cuadrado de la distancia). La ley incluye una constante de proporcionalidad (G) que recibe el nombre de constante de la gravitación universal** y cuyo valor, determinado mediante experimentos muy precisos, es

$$G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$



$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2}\hat{\mathbf{u}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

Para determinar la intensidad del campo gravitatorio asociado a un cuerpo con un radio y una masa determinados ,la Tierra por ejemplo, se establece la aceleración con la que cae un cuerpo de prueba (de radio y masa unidad) en el seno de dicho campo. Dicha aceleración para la **Tierra** toma un valor de **9,8 m/s²** (que equivalen a 9,8 N/kg), mientras que el valor que se obtiene para la superficie de la **Luna** es de tan sólo **1,6 m/s²,** es decir, unas seis veces menor que el correspondiente a nuestro planeta, y en uno de los planetas gigantes del sistema solar, **Júpiter**, este valor sería de unos **24,9 m/s².**

Campo gravitatorio: $\mathbf{g} = \mathbf{F_g}/ m$ es un vector

$\mathbf{F_g}$ es una fuerza conservativa; en una dimensión significa que existe una función potencial ligada a ella (de la cual deriva) que llamamos energía potencial

$F_c = -\, dU/ dx$

$dW = \mathbf{F_c\, dx} = -dU$

$W(A \rightarrow B) = U_A - U_B = K_B - K_A$

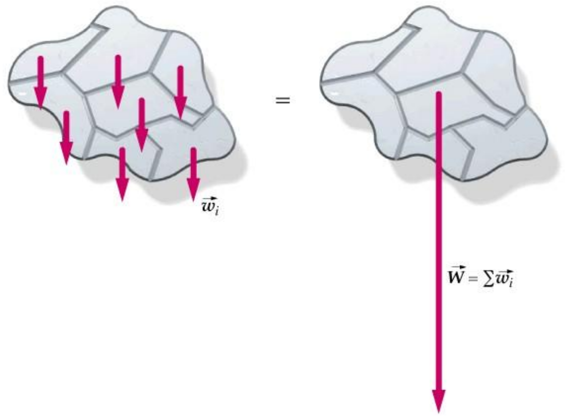
Conserv. energía: $U + K =$ constante

cuando hay simetría esférica como es el caso¸en general de los astros, $F_g = -\, dU_g/ dr$

Potencial gravitatorio $V_g = U_g/m = -G\, M/r$

La energía potencial gravitatoria es cero en el infinito, en cualquier otro punto es negativa

Peso: $P = mg$, $U = mgh$



Ejercicios

1 Calcula la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna (MT, ML, D(T-L): 5.97x 10^{24} , 7.35 x10^{22} , 384 400 km resp.) Dibuja la fuerza.

Sol: 1.98 x 10^{20}N

2 Calcula el peso de un objeto de 40 kg en la superficie de la Tierra y a una altura de 2 veces el radio de la Tierra. RT = 6 400 km dibuja las fuerzas

Sol: 392 n, 43.6 N

3 Calcula el trabajo para llevar el cuerpo del ejercicio anterior desde la superficie hasta donde pesa la mitad (en h = 0.41 RT) y a 20 m de altura

4 Por consideraciones energéticas, explica en qué punto de la órbita un planeta tiene mayor velocidad.

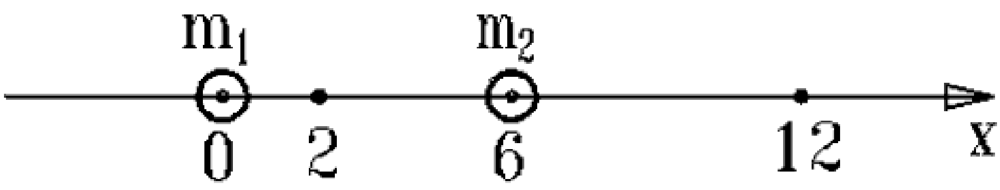
En atención al momento angular, contesta la misma pregunta?

5 $m_1 = 2$ kg , $m_2 = 4$ kg Find the gravitational field at (*a*) $x = 2$ m, and (*b*) $x = 12$ m. (*c*) Find the point on the *x* axis for which $g = 0$.

(*a*) $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$; $\mathbf{g}_1 = -Gm_1/4\ \mathbf{i}$; $\mathbf{g}_2 = Gm_2/16\ \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{g} = G(1/4 - 1/2)\ \mathbf{i} = -1.67 \times 10^{-11}\ \mathbf{i}$ N/kg

(*b*) $\mathbf{g} = (-Gm_1/144 - Gm_2/36)\ \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{g} = -G(1/72 + 1/9)\ \mathbf{i} = -G/8\ \mathbf{i} = -8.34 \times 10^{-12}\ \mathbf{i}$ N/kg

(*c*) $\mathbf{g} = 0$ when $2/x^2 = 4/(6-x)^2$; solve for x $\quad$ $x^2 + 72x - 36 = 0$; $x = 2.484$ m, -8.48 m. From the diagram it is clear that only at $x = 2.484$ m is $\mathbf{g} = 0$.



6 At the surface of the moon, the acceleration due to the gravity of the moon is *a*. At a distance from the center of the moon equal to four times the radius of the moon, the acceleration due to the gravity of the moon is

(*a*) 16*a*. (*b*)*a*/4. (*c*) *a*/3. (*d*) *a*/16. (*e*) none of the above.

(*d*) $a \propto 1/R^2$.

The asteroid Icarus, discovered in 1949, was so named because its highly eccentric elliptical orbit brings it close to the sun at perihelion. *a* is the semimajor axis. The period of Icarus is 1.1 years. Determine the semimajor axis of the orbit of Icarus.

Use Kepler's third law; $a = (1\text{ AU})(T\text{I})^{2/3}$

$a = 1.5 \times 10^{11}$ m/AU $\times\ 1.1^{\,2/3}$ AU $= 1.6 \times 10^{11}$ m

The mass of the earth is 5.97×10^{24} kg and its radius is 6370 km. The radius of the moon is 1738 km. The acceleration of gravity at the surface of the moon is 1.62 m/s^2. What is the ratio of the average density of the moon tothat of the earth?

1. Write gE and gM in terms of rE and rM

$$g_E = G(4\pi\rho_E R_E^{\,3}/3)/R_E^{\,2};\ g_M = G(4\pi\rho_M R_M^{\,3}/3)/R_M^{\,2}$$

2. Find gM/gE and solve for and evaluate rM/rE

$g_M/g_E = \rho_M R_M/\rho_E R_E$; $\rho_M/\rho_E = (1.62/9.81)(6.37/1.738)$
$= 0.605$

(*a*) Taking the potential energy to be zero at infinite separation, find the potential energy of a 100-kg object at the surface of the earth. (Use 6.37 × 106 m for the earth's radius.) (*b*) Find the potential energy of the same object at a height above the earth's surface equal to the earth's radius. (*a*) Use Equ. 11-18; $U(R_E) = -GM_Em/R_E = -gmR_E$

$U(R_E) = -(9.81 \times 100 \times 6.37 \times 10^6)\ \text{J} = -6.25 \times 10^9\ \text{J}$

(*b*) G, M_E, and m are unchanged, $U(2R_E) = U(R_E)/2$

$U(2R_E) = -3.12 \times 10^9\ \text{J}$

An object is dropped from rest from a height of 4 × 106 m above the surface of the earth. If there is no air resistance, what is its speed when it strikes the earth?

1. Use $1/2mv^2 = -\Delta U = U(4 \times 106 + R_E) - U(R_E)$

$1/2v^2 = (3.99\times10^{14})[(1/6.37\times10^6) - (1/10.37\times10^6)]\ \text{J/kg}$

$v = 6.95\ \text{km/s}$

25* ·· Suppose that Kepler had found that the period of a planet's circular orbit is proportional to the square of the orbit
radius. What conclusion would Newton have drawn concerning the dependence of the gravitational attraction on
distance between two masses?

Take $F = CR_n$, where C is a constant. Then, for a stable circular orbit, $v_2/R = F = CR_n$. The period of the orbit is given
by $T = 2pR/v$, and so $T = 2pR/C_{1/2}R_{(n+1)/2}$. Therefore, if $T \propto R_2$, $1 - (n + 1)/2 = 2$, $n = -3$, and $F \propto 1/R_3$.